

Contribution à l'analyse de sensibilité des systèmes complexes : application à la dynamique du véhicule

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 juillet 2015

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Haute-Alsace

Spécialité : Automatique

par

Sabra HAMZA

Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	M. Emmanuel GODOY	Professeur, Centrale Supélec
	M. Rachid MALTI	Professeur, Université de Bordeaux
<i>Examineur :</i>	M. Alain RICHARD	Professeur, Université de Lorraine
<i>Invitée :</i>	Mme Liliane DENIS-VIDAL	MCF, HDR, Université de Lille
<i>Directeur de thèse :</i>	M. Michel BASSET	Professeur, Université de Haute-Alsace
<i>Co-encadrants :</i>	M. Abderazik BIROUCHE	MCF, Université de Haute-Alsace
	Mme Floriane ANSTETT-COLLIN	MCF, Université de Lorraine

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Le travail réalisé dans cette thèse a été effectué au sein de l'équipe Modélisation et Identification en Automatique et Mécanique (MIAM) du laboratoire Modélisation, Intelligence, Processus et Systèmes (MIPS) de l'Université de Haute-Alsace (UHA).

J'exprime toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Michel BASSET, Professeur à l'Université de Haute-Alsace, qui m'a accueillie au MIAM. Je tiens à lui adresser toute ma reconnaissance pour son soutien scientifique et moral.

J'exprime toute ma reconnaissance à Abderazik BIROUCHE, Docteur et Maître de Conférences à l'Université de Haute-Alsace pour son aide et la qualité de son encadrement scientifique.

Je tiens à remercier Floriane ANSTETT-COLLIN, Docteur et Maître de Conférences à l'Université de Lorraine, qui a été à l'initiative de cette thèse, pour son aide et encouragement.

Je remercie Alain RICHARD, Professeur à l'Université de Lorraine, pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie également, Rachid MALTI, Professeur à l'Université de Bordeaux et Emmanuel GODOY Professeur à Centrale Supélec pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Ma gratitude va également à Liliane DENIS-VIDAL, Maître de Conférences et HDR à l'Université de Lille qui m'a fait le plaisir de participer à mon jury.

L'aide et le soutien des membres du MIAM étaient indispensables pour mener à bien ce travail. Je remercie Benjamin, Jean-philippe et Rodolfo pour leur soutien dans les missions d'enseignements que j'ai assurées. Un grand Merci à Hossni, Rachid, Dragos, Jérémy, Thomas et Jonathan pour l'agréable ambiance de travail qu'ils ont créée.

Je tiens à remercier mes amies Mariem, Houda, Fatiha, Marwa et Lydia pour les bons moments qu'on a passés ensemble.

Enfin, je remercie mon père et ma mère, à qui je dois beaucoup, ma sœur et mon frère pour leur soutien tout au long de ma thèse et aussi de m'avoir supporté aux moments de doute et de découragement.

Je dédie cette thèse à la mémoire de ma mère, qui a attendu ce moment avec impatience et qui l'a vécu mais sans pouvoir être parmi nous pour le fêter... Maman, sans toi rien n'aurait été possible, je t'aime infiniment et cette thèse est pour toi !

Table des matières

Table des figures	5
Liste des publications	9
Introduction générale	11

Chapitre 1

État de l'art

1.1	Introduction	17
1.2	Liaison au sol du véhicule	18
1.2.1	Caisse	18
1.2.2	Système de direction	20
1.2.3	Trains roulants	20
1.2.4	Système de suspension	21
1.2.5	Pneumatique	22
1.3	Éléments structuraux et paramétriques des modèles	28
1.3.1	Système dynamique non linéaire	29
1.3.2	Système dynamique linéaire	29
1.3.3	Propriétés stucturelles des modèles	31
1.3.4	Propriétés paramétriques des modèles	32
1.4	Analyse de sensibilité des systèmes	34
1.4.1	Méthodes d'analyse de sensibilité	35
1.4.2	Analyse de sensibilité des modèles à paramètres dépendants	40
1.5	Conclusion	42

Chapitre 2

Analyse de sensibilité des modèles statiques

2.1	Introduction	45
2.2	Motivation d'une analyse de sensibilité statique	45

2.3	Analyse de sensibilité des modèles à paramètres indépendants	46
2.3.1	Représentation d'ANOVA	46
2.3.2	Les polynômes du chaos	48
2.4	Analyse de sensibilité des modèles à paramètres dépendants et distribution arbitraire	53
2.4.1	Méthodologie	54
2.4.2	Procédé de décomposition des paramètres d'entrée	55
2.4.3	Construction d'une base orthonormale	56
2.4.4	Indices de sensibilité estimés par les polynômes du chaos	59
2.5	Application	60
2.5.1	Cas d'un modèle à paramètres indépendants et distribution arbitraire . .	62
2.5.2	Cas d'un modèle à paramètres dépendants et distribution arbitraire . . .	65
2.6	Conclusion	69

Chapitre 3

Analyse de sensibilité des modèles dynamiques

3.1	Introduction	73
3.2	Problématique	73
3.3	Analyse de sensibilité locale basée sur les dérivées partielles pour les modèles dynamiques	74
3.3.1	Cas des modèles linéaires	74
3.3.2	Analyse de sensibilité basée sur les fonctions de transferts	77
3.3.3	Cas des modèles non linéaires	78
3.3.4	Exemple illustratif	79
3.3.5	Application sur un modèle de véhicule	81
3.3.6	Comparaison entre une analyse de sensibilité locale et globale	88
3.4	Analyse de sensibilité basée sur les Grammiens	90
3.4.1	Grammien et énergie d'entrée et de sortie	90
3.4.2	Commande optimale et énergie minimale	91
3.4.3	Placement optimal des paramètres	95
3.5	Application sur un modèle de véhicule	99
3.5.1	Etude de l'influence des paramètres d'un modèle bicyclette sur la variation de l'énergie consommée en entrée	99
3.5.2	Etude de l'influence des paramètres d'un modèle bicyclette sur la variation de l'énergie fournie en sortie	101
3.6	Conclusion	103

Chapitre 4**Analyse de sensibilité pour le recalage d'un modèle de pneumatique**

4.1	Introduction	107
4.2	Problématique	107
4.3	Méthodologie	109
4.4	Recalage d'un modèle de Pacejka MF5.2	110
4.4.1	Spécification des manœuvres	110
4.4.2	Environnement de simulation	111
4.4.3	Instrumentation du véhicule en vue du recalage	112
4.4.4	Recalage de modèle de Pacejka MF5.2	115
4.5	Conclusion	123
	Conclusion et perspectives	125
	Annexe	127
	Bibliographie	131

Table des figures

1	Récapitulation des objectifs de la thèse	13
1.1	Représentation de différents éléments intervenant dans la description de la dynamique du véhicule	17
1.2	(a) Carrosserie, (b) Châssis	18
1.3	Repères usuels	19
1.4	Mouvements de translation et de rotation d'un véhicule automobile	19
1.5	Exemple d'un système de direction	20
1.6	Exemple de (a) train avant, (b) train arrière d'un véhicule automobile ¹	21
1.7	Exemple de système de suspension avant	21
1.8	(a) Suspension passive, (b) Suspension semi-active, (c) Suspension active	22
1.9	Différents éléments composant un pneu	23
1.10	Efforts et moments appliqués sur le pneu	24
1.11	(a) Angle de dérive, (b) Angle de carrossage, (c) Angle de braquage	25
1.12	Courbe caractéristique de la force latérale en fonction de l'angle de dérive selon le modèle de Pacejka	26
1.13	Modèle d'un quart de véhicule avec suspension active	28
1.14	Différentes classes de modèles linéaires	31
1.15	Indices obtenus par la méthode Fast	39
1.16	Indices obtenus par les polynômes du chaos	39
1.17	Indices obtenus par la méthode de Monte-Carlo	39
2.1	Modèle entrée-sortie.	45
2.2	Principe de la méthodologie proposée.	60
2.3	Vue d'ensemble des entrées et des sorties du modèle de Pacejka.	61
2.4	Densités de probabilité des paramètres (a) p_1 , (b) p_2 et (c) p_3	62
2.5	Rigidité latérale en fonction de F_z et des micro-coefficients (a) p_1 , (b) p_2 et (c) p_3	63
2.6	Figure du haut : sortie du modèle et sortie estimée - Figure du bas : erreur d'estimation en fonction du degré du polynôme du chaos choisi.	64

2.7	Indices de sensibilité pour : (a) $F_z \approx F_{z_0}$, (b) $F_z \ll F_{z_0}$ (c) $F_z \gg F_{z_0}$	66
2.8	Force latérale pure F_y en fonction de l'angle de dérive α , pour différentes valeurs de la charge verticale F_z	67
3.1	Représentation d'un système dynamique dépendant des paramètres.	73
3.2	Principe de la construction d'un modèle de fonctions de sensibilité pour un système dynamique linéaire	75
3.3	Principe de la construction d'un modèle de fonctions de sensibilité pour un système dynamique non linéaire	78
3.4	Système masse-ressort-amortisseur	80
3.5	Evolution des fonctions de sensibilité associées à m , b et k en fonction du temps après normalisation	81
3.6	Modèle 2ddl dit bicyclette	82
3.7	Angle de braquage	85
3.8	Evaluation de l'influence des paramètres M , L_f et L_r sur la vitesse latérale en fonction du temps	86
3.9	Evaluation de l'influence des paramètres C_r , C_f , I_z et V_x sur la vitesse latérale en fonction du temps	86
3.10	Evaluation de l'influence des paramètres M , L_f et L_r sur la vitesse angulaire de lacet en fonction du temps	87
3.11	Evaluation de l'influence des paramètres C_r , C_f , I_z et V_x sur la vitesse angulaire de lacet en fonction du temps	87
3.12	(a) Fonctions de sensibilité obtenues par les dérivées partielles , (b) Fonctions de sensibilité obtenues par les polynômes du chaos	89
3.13	Tracés des ellipses d'atteignabilité pour une variation du coefficient de raideur k (a), une variation de la masse m (b) et une variation du coefficient d'amortissement b (c)	94
3.14	Energie consommée en fonction de temps pour différentes valeurs de paramètres .	95
3.15	Analyse de sensibilité à partir des Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité .	96
3.16	Evolution de la fonction coût en fonction des itérations	97
3.17	Comparaison des énergies de sorties obtenues pour le placement optimal et un placement non optimal	98
3.18	Energie consommée pour atteindre l'état $x(t_f) = (1; 0, 01)$	100
3.19	Energie consommée pour atteindre l'état $x(t_f) = (0, 01; 1)$	100
3.20	Energie collectée en sortie pour $x(t_0) = (1; 0, 01)$	102
3.21	Energie collectée en sortie pour $x(t_0) = (0, 01; 1)$	102
4.1	Force latérale en fonction de l'angle de dérive et la rigidité latérale	108

4.2	Procédure de recalage des paramètres	109
4.3	Trajectoire suivie	111
4.4	Exemple de trajectoire créée sur CarMaker®	112
4.5	Véhicule d'essai	113
4.6	Jante de la roue dynamométrique	114
4.7	Roue dynamométrique installée avec le pneumatique	114
4.8	Centrale inertielle avec Split IMU	115
4.9	Centrale inertielle installée	115
4.10	Cycle de recalage de modèle de Pacejka MF5.2	116
4.11	Force latérale et angle de dérive	117
4.12	Force latérale en fonction de l'angle de dérive	118
4.13	Force latérale en fonction de l'angle de dérive après ajustement des paramètres	119
4.14	Trajectoire réalisée sur CarMaker®	120
4.15	Force latérale et angle de dérive	121
4.16	Force latérale en fonction de l'angle de dérive	121
4.17	Force latérale en fonction de l'angle de dérive après recalage	122

Liste des publications

Revue avec comité de lecture et actes

- Sabra Hamza, Floriane Anstett-Collin, Abderazik Birouche and Michel Basset. **Analyse de sensibilité pour l'étude d'un modèle de pneu avec des paramètres corrélés et une distribution arbitraire.** *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 2013, 44, pp 289-303.

Congrès internationaux avec comité de lecture

- Sabra Hamza, Abderazik Birouche, Michel Basset, Floriane Anstett-Collin and Juan Tudon Martinez. **Sensitivity analysis of magneto-rheological damper : an experimental and theoretical study.** In *12th International symposium on Advanced VEHICLE Control, AVEC'14*, Tokyo, Japan, Sept, 2014.
- Sabra Hamza, Abderazik Birouche, Michel Basset and Floriane Anstett-Collin. **Sensitivity analysis of tire model micro-coefficients.** In *MascotNum Workshop on Computer Experiments and Meta-models for uncertainty Quantification*, Zurich, Switzerland, 23-25 April, 2014. (Poster).
- Sabra Hamza, Abderazik Birouche, Floriane Anstett-Collin and Michel Basset. **Sensitivity analysis for the study of a tire model with correlated parameters and an arbitrary distribution.** In *7th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output*, Nice, France, 1-4 July, 2013.(Poster).
- Sabra Hamza, Floriane Anstett-Collin, Rimyalegdo Kiebre and Michel Basset. **Analyse de sensibilité basée sur les polynômes du chaos pour des modèles de type boîte noire.** In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2012)*, Grenoble, France, 4-6 Juillet, 2012.

Séminaires avec comité de lecture

- Sabra Hamza, Floriane Anstett-Collin, Abderazik Birouche and Michel Basset. **Analyse de sensibilité pour l'étude d'un modèle de pneu avec des paramètres corrélés et une distribution arbitraire.** *5èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS*, Strasbourg, France, 11-12 Juillet, 2013.

Introduction générale

Contexte et motivation

Selon le bilan de l'accidentalité et de la sécurité routière en France de l'année 2012 [1], un nombre important d'accidents est dû essentiellement à la dégradation de l'infrastructure (entretien, conception), aux véhicules et au comportement des usagers (qualité de la formation, répression). Ces dernières années, des progrès sont observés en sécurité routière grâce à l'intérêt particulier qui a été porté sur l'étude du comportement des véhicules. En effet, le comportement et la contrôlabilité du véhicule dépendent particulièrement des propriétés du contact pneu/sol qui constitue un élément essentiel dans le fonctionnement, la sécurité et le confort du véhicule.

Le contact pneu/sol est défini par un ensemble de sous-systèmes de nature différente (trains roulants, système de suspension, pneumatique...). Chaque sous-système est décrit par un modèle mathématique qui dépend d'un nombre important de paramètres. La modélisation de ces sous-systèmes est entachée d'incertitudes dues au manque de données et de mesures,... Ces incertitudes sur les paramètres entraînent des incertitudes sur les sorties de ces modèles. Cependant, les paramètres n'ont pas tous le même niveau d'influence sur la sortie du modèle. Il est alors primordial de déterminer les paramètres traduisant la variation des forces exercées au niveau du pneu/sol afin de connaître les mécanismes impliqués dans les situations dangereuses. Par conséquent, une analyse de sensibilité est essentielle afin de déterminer les paramètres importants. Situés dans ce contexte, les travaux de thèse consistent à développer des méthodes d'analyse de sensibilité permettant de déterminer les paramètres dont les incertitudes ont un effet significatif sur le comportement d'un système donné, en particulier le véhicule.

Les travaux de la thèse s'inscrivent dans le cadre du projet français INOVE /ANR 2010 BLAN 0308 (Une approche INTégrée pour l'Observation et la commande de la dynamique de VEhicule). L'objectif du projet est de proposer et de développer de nouvelles méthodes pour l'identification, l'observation, la détection, la commande robuste tolérante aux fautes de la dynamique du véhicule. Les travaux de cette thèse interviennent dans le cadre d'une tâche dont l'objectif est la modélisation physique du comportement dynamique des véhicules ainsi que l'identification des

paramètres de ces modèles.

Objectifs de la thèse

Les méthodes d'analyse de sensibilité peuvent être locales ou globales. Les méthodes locales évaluent quantitativement l'impact d'une petite variation autour d'une valeur donnée des paramètres. Les méthodes globales permettent la détermination de l'impact sur la sortie de variations des paramètres dans la totalité de leur intervalle de variation. Dans différents domaines, et en particulier dans le domaine de l'automobile, les paramètres varient dans un intervalle large. Par conséquent, l'application des méthodes locales d'analyse de sensibilité s'avèrent non pertinentes ou non concluantes. De plus, l'analyse globale permet de mettre en évidence les éventuelles interactions entre les paramètres. Pour cela, nous mettons l'accent, dans cette thèse, sur les méthodes globales d'analyse de sensibilité .

La majorité des méthodes globales sont dédiées uniquement aux modèles à paramètres indépendants. En outre, ces méthodes supposent une distribution connue (uniforme, gaussienne, ...) des paramètres. En pratique, l'hypothèse d'indépendance des paramètres peut s'avérer non réaliste. D'autre part, dans le domaine de l'automobile, la mise en œuvre des essais est coûteuse en termes du temps, de ressources matérielles ou humaines. Par conséquent peu de mesures sont disponibles et les paramètres ne suivent pas forcément une distribution connue. L'objectif de la thèse est de proposer des méthodes d'analyse de sensibilité globale dans le cas où les paramètres sont corrélés et ne suivent pas une distribution forcément connue. D'autre part, l'aspect dynamique du système est aussi rarement considéré dans la littérature sur l'analyse de sensibilité. Des méthodes locales sont proposées ainsi que des extensions de méthodes globales où l'influence des paramètres est calculée à chaque instant indépendamment de l'instant précédent. Le deuxième objectif de cette thèse est de proposer une méthode d'analyse de sensibilité globale où la notion de récursivité est conservée. Ces deux objectifs sont récapitulés et donnés sur la figure (1).

En industrie, l'analyse de sensibilité peut s'avérer être un outil efficace pour recalibrer les modèles et réduire le nombre des essais et tests à effectuer. Le troisième objectif de cette thèse est de valoriser cette technique dans un contexte applicatif et en particulier pour ajuster les modèles.

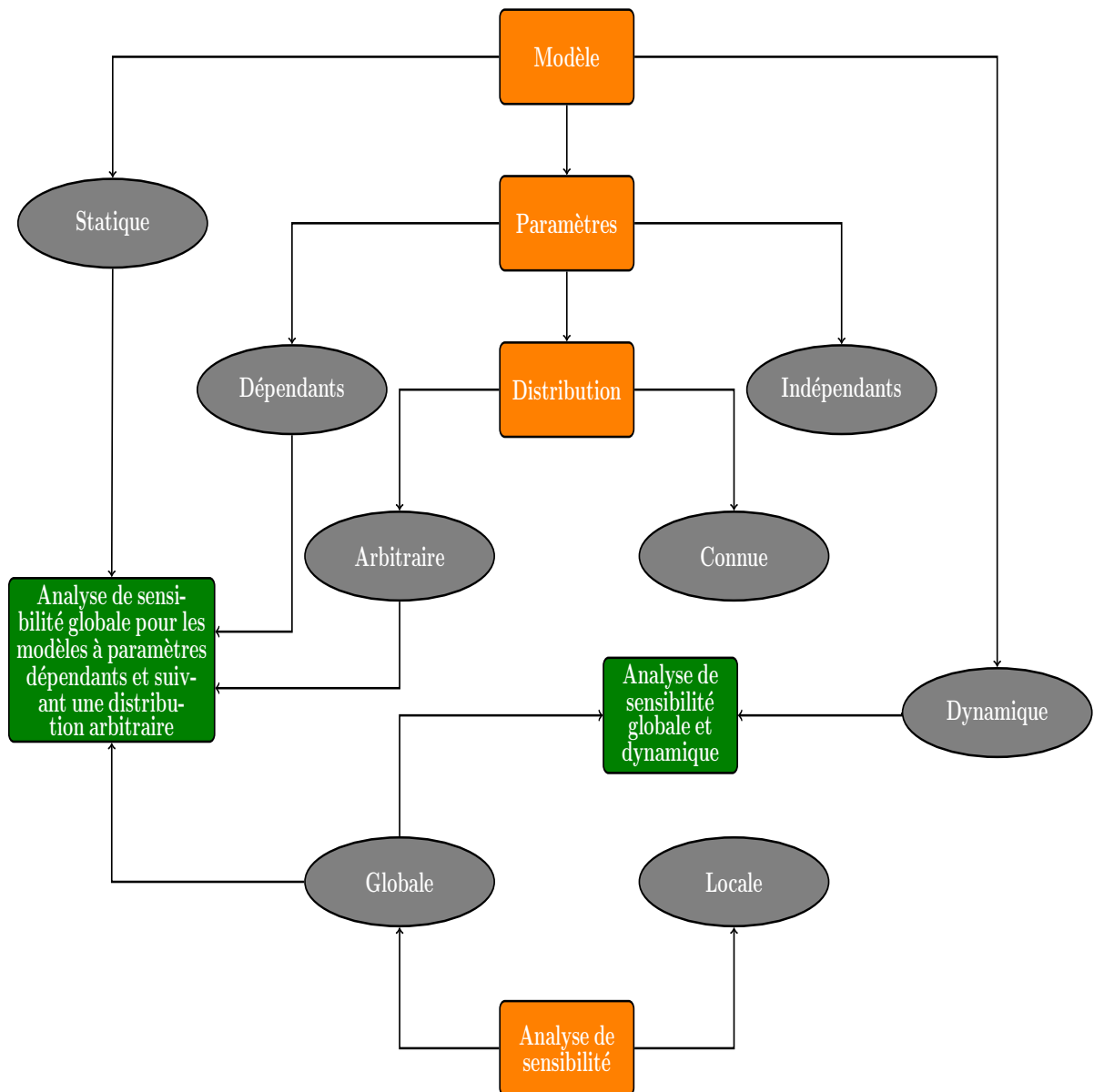


FIGURE 1 – Récapitulation des objectifs de la thèse

Organisation des chapitres

Ce mémoire est organisé de la manière suivante.

Chapitre 1

Le premier chapitre est dédié à présenter et rappeler des éléments fondamentaux liés à la dynamique du véhicule et des outils nécessaires pour comprendre les travaux réalisés dans la thèse.

Premièrement, les différents composants du véhicule sont introduits. Ensuite, des outils statistiques ainsi qu'un état de l'art sur les méthodes d'analyse de sensibilité sont présentés.

Chapitre 2

Le deuxième chapitre est consacré à présenter une nouvelle approche basée sur les polynômes du chaos pour s'affranchir des limites d'indépendance et de la distribution des paramètres du modèle. La méthode est appliquée et validée avec succès sur un modèle de pneumatique.

Chapitre 3

Dans le troisième chapitre, deux nouvelles méthodes d'analyse de sensibilité pour les systèmes dynamiques sont développées. Une méthode locale basée sur les dérivées partielles et une méthode dynamique et globale basée sur les Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité sont présentées. Ces deux méthodes sont appliquées et validées sur un modèle dynamique simplifié du véhicule.

Chapitre 4

Enfin, dans le chapitre 4, l'analyse de sensibilité est valorisée dans un contexte pratique. Les résultats obtenus dans le deuxième chapitre ont été exploités afin de montrer l'utilité de l'analyse de sensibilité pour recalibrer un modèle de la pneumatique.

1

État de l'art

Sommaire

1.1	Introduction	17
1.2	Liaison au sol du véhicule	18
1.2.1	Caisse	18
1.2.2	Système de direction	20
1.2.3	Trains roulants	20
1.2.4	Système de suspension	21
1.2.5	Pneumatique	22
1.3	Éléments structurels et paramétriques des modèles	28
1.3.1	Système dynamique non linéaire	29
1.3.2	Système dynamique linéaire	29
1.3.3	Propriétés stucturelles des modèles	31
1.3.4	Propriétés paramétriques des modèles	32
1.4	Analyse de sensibilité des systèmes	34
1.4.1	Méthodes d'analyse de sensibilité	35
1.4.2	Analyse de sensibilité des modèles à paramètres dépendants	40
1.5	Conclusion	42

1.1 Introduction

Le véhicule automobile est un système dynamique assez complexe [2, 3]. De nombreux facteurs interviennent dans la description de sa dynamique comme le montre la figure (1.1), à savoir : le conducteur, l'état de la route, les perturbations atmosphériques, les caractéristiques géométriques de virage, l'interaction pneu/sol, etc.

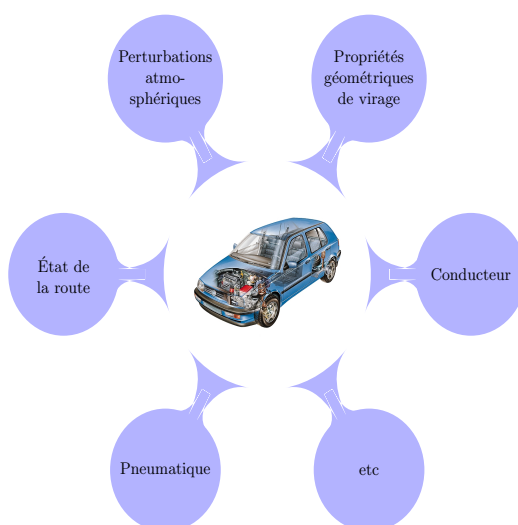


FIGURE 1.1 – Représentation de différents éléments intervenant dans la description de la dynamique du véhicule

En fait, le comportement du véhicule automobile est influencé principalement par les propriétés du contact pneu/sol. En effet, le pneu est le seul point de contact avec le sol et est un élément déterminant dans la dynamique d'un véhicule. Afin de caractériser l'interface roue-sol, il est important de considérer différents sous-systèmes reliant le volant au pneu. Chaque sous-système est décrit par un modèle qui se compose d'une structure et de paramètres. En outre, les paramètres n'ont pas tous le même niveau d'influence sur la sortie de système.

Ce chapitre présente les prérequis et les outils théoriques essentiels qui serviront à la compréhension de ce manuscrit. Dans la première partie, nous décrivons les principaux éléments intervenant dans le contact du pneu avec le sol. Dans la seconde partie, nous présentons les caractéristiques structurelles et paramétriques des modèles dynamiques. La dernière partie est dédiée à l'analyse de sensibilité. Un état de l'art sur les différentes méthodes d'analyse de sensibilité existantes dans la littérature est ainsi présenté.

1.2 Liaison au sol du véhicule

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la liaison au sol du véhicule. Pour plus de détails sur la dynamique du véhicule, il est possible de se référer aux publications suivantes [2, 3]. Nous nous limitons, dans cette partie, à présenter l'ensemble des sous-systèmes impliqués pour la caractérisation du contact du pneu au sol : la caisse, le système de direction, le train roulant, la suspension et le pneumatique. Afin d'appréhender le comportement de la dynamique du véhicule, il est nécessaire de comprendre les constituants de chaque système.

1.2.1 Caisse

La caisse se compose du châssis et de la carrosserie (figure (1.2)). Elle se caractérise par ses paramètres de masse et d'inertie. Cette masse est appelée suspendue car elle est portée par les suspensions et les roues.

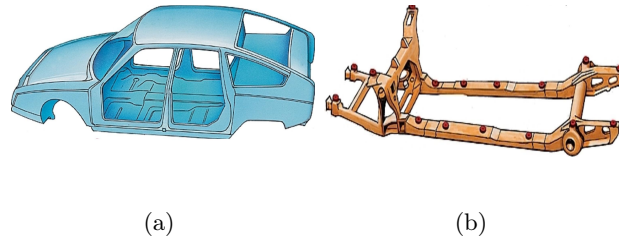


FIGURE 1.2 – (a) Carrosserie, (b) Châssis

Le mouvement de l'automobile est défini en partie par le mouvement de translation et de rotation de la caisse. Avant d'introduire les mouvements principaux de la caisse, il est important de présenter les principaux repères de travail.

1.2.1.1 Repères

Les principaux repères utilisés pour l'étude de la dynamique de l'automobile sont : le repère au sol, le repère lié au véhicule et le repère lié au pneumatique (figure (1.3)).

- le repère au sol $R_s(O_s, x_s, y_s, z_s)$ correspond au mouvement du véhicule par rapport au sol. Ce repère est défini de façon classique : l'axe z_s est vertical et orienté vers le haut et les axes x_s et y_s forment avec z_s un trièdre direct.
- le repère lié au véhicule $R(CdG, x, y, z)$ est d'origine CdG , le centre de gravité du véhicule, et représente un système d'axes par rapport auxquels les différents mouvements de la caisse sont définis.
- le repère lié au pneumatique $R_p(R_r, x_r, y_r, z_r)$ avec R_r l'origine représentant le point de contact pneu/sol. L'axe x_r se situe dans le plan de la roue, y_r est perpendiculaire au plan

de la roue et z_r est normal au plan de la route. Ce repère est souvent utilisé pour définir les différents efforts générés au niveau du pneu/sol.

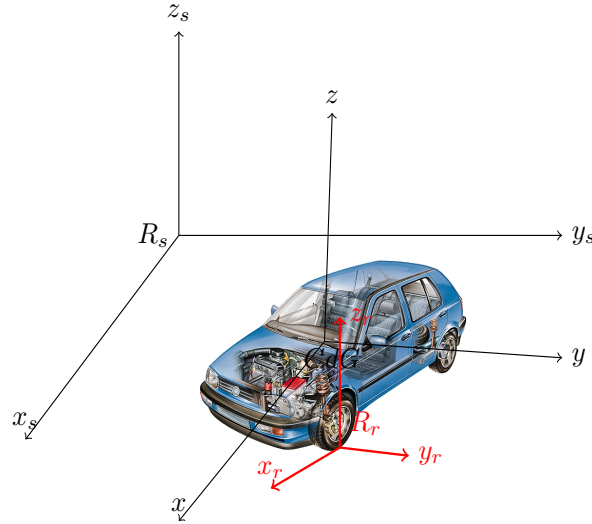


FIGURE 1.3 – Repères usuels

1.2.1.2 Différents mouvements de la caisse

La dynamique de caisse d'un véhicule automobile est caractérisée principalement par trois mouvements de translation et trois mouvements de rotation comme le montre la figure (1.4).

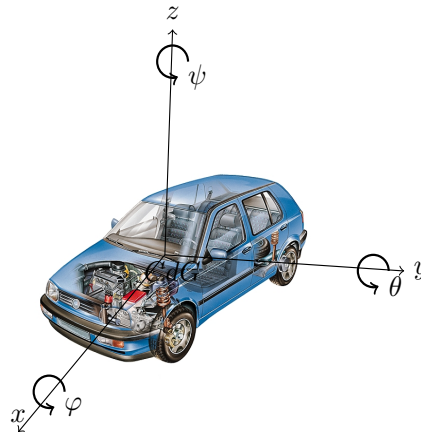


FIGURE 1.4 – Mouvements de translation et de rotation d'un véhicule automobile

Les mouvements de translation sont :

- le mouvement de translation longitudinale suivant l'axe x ;
- le mouvement de translation latérale suivant l'axe y ;
- le mouvement de translation verticale suivant l'axe z ;

Les mouvements de rotation sont décrits à partir des angles d'Euler tels que :

- le roulis φ . Ce mouvement est dû à des oscillations autour de l'axe x . La matrice de rotation autour de l'axe x est ainsi définie comme suit :

$$M_{rot_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- le tangage θ . Ce mouvement de rotation autour de l'axe y intervient lors des phases d'accélération et de freinage. La matrice de rotation autour de l'axe y est définie par :

$$M_{rot_y} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- le lacet ψ . La matrice de rotation autour de l'axe z est définie par :

$$M_{rot_z} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Système de direction

Le système de direction permet au conducteur d'orienter les roues avec précision. En effet, il permet de convertir le mouvement de rotation exercé sur le volant en un changement de direction des roues. Il se compose du volant, de la colonne de direction et de la crémaillère, etc (figure (1.5)).

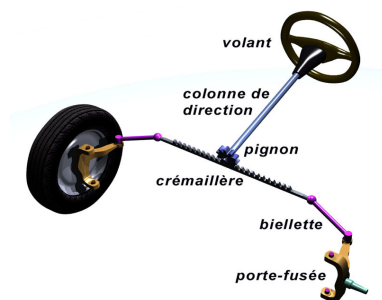


FIGURE 1.5 – Exemple d'un système de direction

1.2.3 Trains roulants

Les essieux relient la roue au châssis et ils permettent de guider l'orientation du plan de la roue selon une géométrie complexe par rapport à la caisse. Les systèmes de suspension, les organes

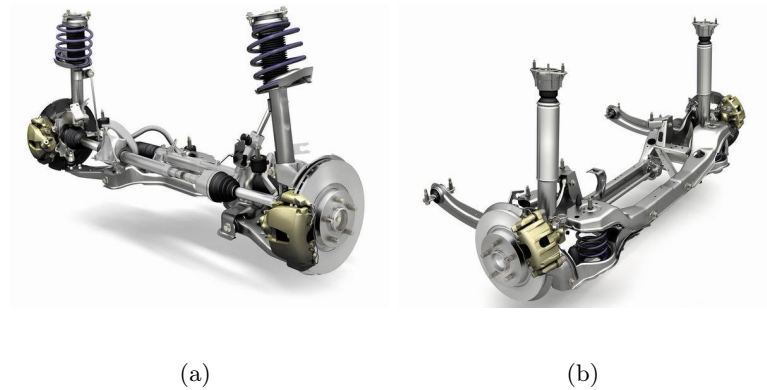


FIGURE 1.6 – Exemple de (a) train avant, (b) train arrière d'un véhicule automobile²

de transmission, les systèmes de freinage sont combinés avec l'essieu pour constituer les trains roulants. On distingue le train roulant avant et le train roulant arrière (voir figure (1.6)).

1.2.4 Système de suspension

Le système de suspension assure le lien entre la caisse et la roue. Ainsi, il protège le châssis des perturbations générées lors du contact pneu/sol comme illustré sur la figure (1.7).



FIGURE 1.7 – Exemple de système de suspension avant

Un système de suspension est composé des éléments suivants :

- un amortisseur représentant l'élément central de la suspension automobile permettant d'amortir les sollicitations vibratoires issues de la route.
- un ressort monté précontraint et en parallèle avec l'amortisseur qui emmagasine l'énergie lorsqu'il est écrasé sous une force et la restitue si la force diminue.

Trois types de suspension sont fréquemment utilisées sur les automobiles : la suspension passive, la suspension semi-active et la suspension active (figure (1.8)).

- *Suspension passive* : elle se compose d'un ressort k_s et d'un amortisseur c . La force dépend

2. http://wallyfocus.free.fr/Description_C-Max/Train_AV.jpg

de l'accélération, de la vitesse et de l'écart de position entre la caisse et la roue. Ces dernières fonctionnent par réaction uniquement en absorbant une partie de l'énergie.

- *Suspension semi-active* : il s'agit d'un compromis entre les suspensions active et passive. Ces systèmes dissipent de l'énergie en produisant une force qui s'oppose à la vitesse entre la caisse et la roue. Ils se caractérisent par leur caractère adaptatif de l'amortissement dans le temps.
- *Suspension active* : la force active développée dans ce système est produite généralement à partir d'un actionneur électromécanique commandé, placé en parallèle de la suspension. Ces systèmes sont peu utilisés à cause de leur complexité et consommation d'énergie [4].

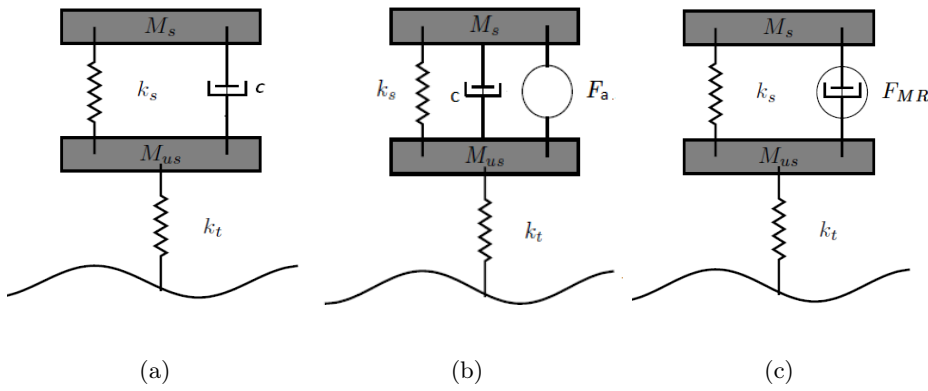


FIGURE 1.8 – (a) Suspension passive, (b) Suspension semi-active, (c) Suspension active

Sur la figure (1.8), M_s représente la caisse ainsi que M_{us} représente la roue et le pneu. Le pneu est représenté par un ressort de raideur k_t .

1.2.5 Pneumatique

Le pneumatique constitue le seul contact du véhicule avec le sol. Ainsi, c'est au niveau du pneumatique que s'exercent tous les efforts du sol sur le véhicule. La littérature est riche des modèles décrivant le comportement des pneumatiques. On distingue principalement des modèles analytiques, empiriques et semi-empiriques. Les modèles analytiques présentés dans [5] se basent sur une description physique de la déformation élémentaire du pneumatique au niveau du contact du pneu avec le sol. Les modèles établis à partir de données expérimentales ont donné lieu à des modèles empiriques. De nombreux travaux ont porté sur cette catégorie de modèle tels que "la formule magique" qui est développée par Pacejka [5], le modèle de Dugoff [6] ou encore le modèle de Burckhardt [7, 8]. Certains paramètres de ces modèles n'ont pas nécessairement de signification physique et les modèles estiment les efforts statiques en jeu. Enfin, les modèles semi-empiriques utilisent les deux approches, analytique et empirique. Plus particulièrement, ils se basent sur des lois de comportement empiriques et les intègrent dans un calcul analytique des forces tel que le

modèle de Bekker [9].

Dans la suite, nous allons d'abord présenter les différents composants d'un pneu, pour, ensuite, décrire son comportement via un modèle.

1.2.5.1 Les composants d'un pneu

Le pneu est un ensemble composite, c'est-à-dire un assemblage de plusieurs matériaux aux propriétés très différentes. Il se compose des éléments suivants (figure (1.9)) [10] :

1. la gomme intérieure est une gomme caoutchoutée qui se trouve à l'intérieur du pneu et a le rôle de chambre à air ;
2. la nappe carcasse est la partie qui supporte la charge du véhicule ;
3. la zone basse a pour rôle de transmettre les couples moteur et freineur de la jante vers l'aire de contact au sol ;
4. les triangles sont les moulures du pneu qui permettent la fixation du pneu sur la jante ;
5. les flancs sont les parties latérales du pneu qui servent à le protéger des chocs qui pourraient endommager la carcasse ;
6. les nappes sommets sont les différentes épaisseurs qui recouvrent la carcasse. Elles se caractérisent essentiellement par une rigidité leur permettant de résister aux efforts de dérive (longitudinale et latérale) ;
7. la bande de roulement est la partie du pneu entrant en contact avec la chaussée. Elle permet de transmettre les efforts et d'obtenir l'adhérence avec un minimum de glissement.



FIGURE 1.9 – Différents éléments composant un pneu

1.2.5.2 Efforts et moments d'un pneumatique

Le pneumatique est sujet à différents efforts et moments. Ceux-ci sont dus à un nombre d'interactions telles que l'interaction entre la roue et la chaussée, entre la roue et le système

de suspension ou bien entre la roue et les éléments du système de direction. Ces efforts sont aussi affectés par les perturbations générées par l'environnement [10]. Les efforts et les moments intervenant lors du contact du pneu avec le sol, sont illustrés sur la figure (1.10).

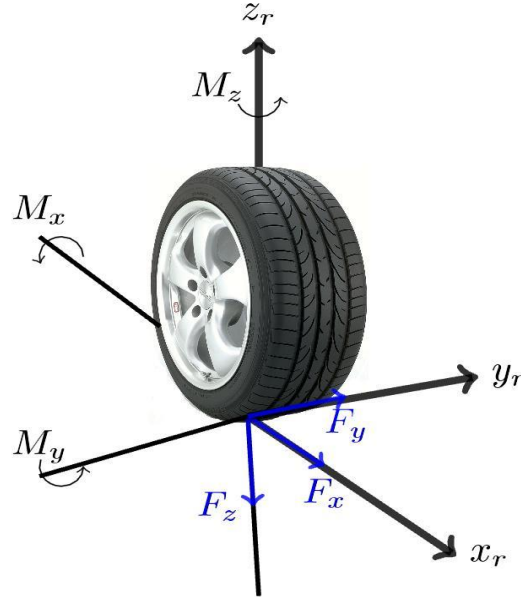


FIGURE 1.10 – Efforts et moments appliqués sur le pneu

Les différents efforts générés entre le pneu et le sol sont :

- F_x : la force longitudinale ;
- F_y : la force latérale ;
- F_z : la force verticale ;

Les moments générés sont :

- M_x : le moment de renversement autour de l'axe x ;
- M_y : le moment de résistance au roulement autour de l'axe y ;
- M_z : le moment d'auto-alignement autour de l'axe z .

Pour une meilleure compréhension du comportement du pneumatique, il est important de définir les différents angles qui interviennent dans son comportement.

1.2.5.3 Angle de dérive, de carrossage et de braquage et taux de glissement

Pour caractériser l'orientation de la roue par rapport au véhicule, on définit les angles suivants (figure (1.11)).

- L'angle de dérive du pneu α est l'angle entre le plan de la jante et la vitesse \vec{V} du véhicule.
- L'angle de carrossage γ est l'angle d'inclinaison de la roue par rapport au plan vertical.
- L'angle de braquage β est l'angle entre l'axe longitudinal du véhicule et le plan de roue.

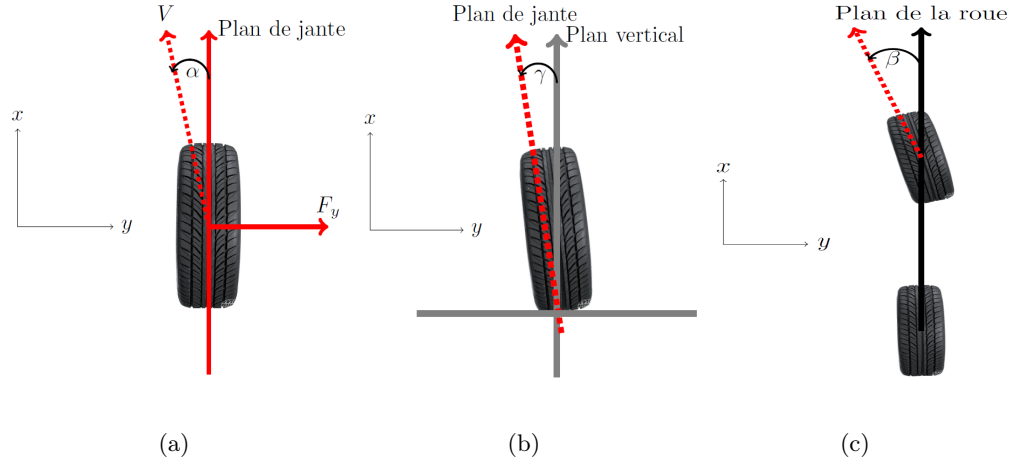


FIGURE 1.11 – (a) Angle de dérive, (b) Angle de carrossage, (c) Angle de braquage

- Le taux de glissement longitudinal est donné par l'expression suivante :

$$\kappa = \frac{V_x - wR}{V_x}$$

Il décrit la différence normalisée entre la vitesse longitudinale V_x et la multiplication de la vitesse angulaire de la roue w et son rayon R .

1.2.5.4 Modèle de Pacejka

Le modèle de Pacejka, basé sur la "formule magique", est une référence dans le domaine de l'automobile pour la modélisation du comportement du pneumatique. La première version de ce modèle a été proposée à la fin des années 1970 [11]. Ce modèle se caractérise par sa simple représentation des efforts et des moments générés au niveau de l'interaction entre la roue et le sol. En outre, il dépend de paramètres ajustables pour mieux représenter les forces et les moments générés entre le pneu et le sol.

L'expression générale pour décrire les efforts et les moments générés est :

$$\begin{aligned} y(x) &= D \sin(C \arctan(Bx - E(Bx - \arctan(Bx)))) \\ Y(x) &= y(x) + S_v \\ x &= X + S_h \end{aligned} \tag{1.1}$$

où Y peut correspondre à la force longitudinale F_x , à la force latérale F_y , ou au moment d'auto-alignement M_z . X peut correspondre au glissement κ ou à l'angle de dérive α .

Une courbe caractéristique du comportement transversal d'un pneumatique est présentée sur la figure (1.12).

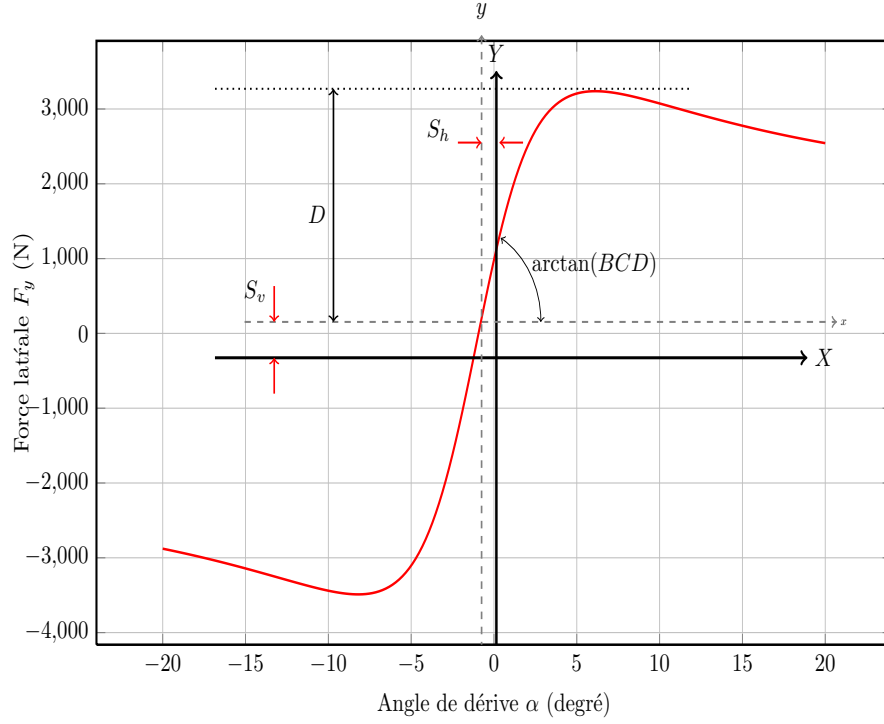


FIGURE 1.12 – Courbe caractéristique de la force latérale en fonction de l'angle de dérive selon le modèle de Pacejka

Les paramètres B , C , D , E , S_h et S_v de la formule (1.1), appelés macro-coefficients, permettent d'ajuster l'allure de cette caractéristique par rapport aux relevés expérimentaux.

- B : le coefficient de rigidité qui permet d'ajuster la pente à l'origine ;
- C : le coefficient de forme qui permet d'ajuster l'allure de la courbe ;
- D : le coefficient d'amplitude qui correspond au maximum de la courbe d'adhérence ;
- E : le coefficient de courbure ;
- S_h : le décalage horizontal par rapport à l'origine ;
- S_v : le décalage vertical par rapport à l'origine ;
- Le terme $B.C.D$ représente la pente à l'origine et donc la rigidité latérale du pneu pour des faibles sollicitations.

La force longitudinale F_x est définie de la manière suivante :

$$F_x = D_x \sin (C_x \arctan (B_x(\kappa + S_{hx}) - E (B_x(\kappa + S_{hx}) - \arctan (B_x(\kappa + S_{hx})))))) + S_{vx} \quad (1.2)$$

et les macro-coefficients décrivant la force longitudinale sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned}
B_x \cdot C_x \cdot D_x &= a_3 \sin \left(2 \arctan \left(\frac{F_z}{a_4} \right) \right) (1 - a_5 |\gamma|) \\
C_x &= a_{18} \\
D_x &= (a_1 F_z^2 + a_2 F_z) (1 - a_{15} \gamma^2) \\
E_x &= (1 - (a_{16} \gamma - a_{17}) \operatorname{sign}(\alpha)) (a_6 F_z + a_7) \\
S_{hx} &= a_8 F_z + a_9 + a_{10} \gamma \\
S_{vx} &= a_{11} F_z + a_{12} + (a_{13} F_z + a_{14}) \gamma F_z
\end{aligned} \tag{1.3}$$

avec a_i , $i = 1, \dots, 18$ les micro-coefficients.

Ces macro-coefficients ne sont pas constants et dépendent de paramètres appelés micro-coefficients. A partir de l'équation (1.3) exprimant les paramètres en fonction des micro-coefficients, nous remarquons qu'hormis le coefficient de forme C , tous les macro-coefficients dépendent de la charge verticale F_z et de l'angle de carrossage γ . Ces micro-coefficients sont fixés pour des conditions expérimentales (type de pneumatique, condition d'adhérence, etc).

La force latérale F_y est définie comme suit :

$$F_y = D_y \sin (C_y \arctan (B_y(\alpha + S_{hy}) - E_y (B_y(\alpha + S_{hy}) - \arctan (B_y(\alpha + S_{hy})))) + S_{vy} \tag{1.4}$$

Le moment d'auto-alignement M_z est donné par l'expression suivante :

$$M_z = D_z \sin (C_z \arctan (B_z(\kappa + S_{hz}) - E (B_z(\kappa + S_{hz}) - \arctan (B_z(\kappa + S_{hz})))) + S_{vz} \tag{1.5}$$

Remarque 1.2.1 Si une sollicitation longitudinale entre en jeu avec la sollicitation latérale, une force combinée est formée et se détermine par l'expression suivante :

$$F_c = F_y G + F_x \tag{1.6}$$

G est déterminé à partir des macro-coefficients et des micro-coefficients.

1.2.5.5 Modèle quart de véhicule avec une suspension active

Ce modèle est souvent utilisé dans les études traitant les suspensions, figure (1.13). Il se compose d'une masse suspendue M_s qui représente la caisse et d'une masse non suspendue M_{us} qui représente la roue et le pneu. Ces deux masses sont reliées par un ressort k_s et un amortisseur semi-actif. Le pneu est représenté par un ressort de raideur k_t .

Le modèle dynamique d'un quart de véhicule avec suspension active est écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
M_s \ddot{z} &= -F_{MR} - k_s z \\
M_{us} \ddot{z}_{us} &= k_s z + F_{MR} - k_t (z_{us} - z_r)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

avec :

- F_{MR} : la force d'amortissement qui est la partie active de la suspension ;
- z_s : le déplacement vertical autour du point d'équilibre de M_s ;
- z_{us} : le déplacement vertical autour du point d'équilibre de m_{us} ;
- z_r : la variation du profil de la route ;
- $z = z_s - z_{us}$: le débattement de l'amortisseur ;
- $\dot{z} = \dot{z}_s + \dot{z}_{us}$: la vitesse de débattement.

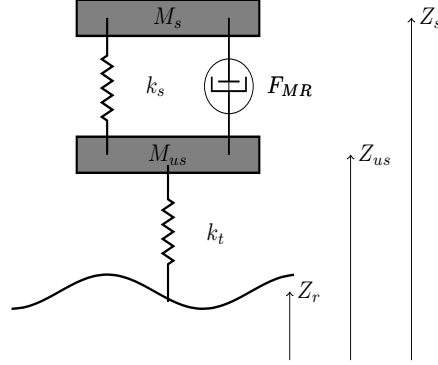


FIGURE 1.13 – Modèle d'un quart de véhicule avec suspension active

Plusieurs modèles existent dans la littérature pour décrire le comportement de chaque sous-système du véhicule décrit précédemment. Ces modèles peuvent être complexes et dépendent de nombreux paramètres. Ces paramètres peuvent être entachés d'une incertitude qui peuvent influencer le comportement global du véhicule. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux paramètres incertains dans un intervalle de variation. Avant d'exposer les méthodes existantes pour analyser la sensibilité de la réponse d'un système donné via l'incertitude de ces paramètres, nous présentons les différentes caractéristiques structurelles et paramétriques qui peuvent définir la dynamique des systèmes.

1.3 Éléments structurels et paramétriques des modèles

Les modèles représentant les phénomènes physiques peuvent être statiques ou dynamiques. Un système est dit statique, s'il n'évolue pas au cours du temps t . Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps. Ce système respecte le critère de causalité, c'est-à-dire la sortie du système dépend non seulement de l'entrée présente mais aussi des entrées et des sorties passées.

Dans la partie suivante, nous nous intéressons, plus particulièrement aux caractéristiques des modèles dynamiques. Ces modèles peuvent être continus et modélisés par des équations différentielles ou bien discrets et modélisés par des équations aux différences.

1.3.1 Système dynamique non linéaire

Un système dynamique non linéaire à temps continu est souvent représenté comme suit :

$$\sum_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(t) \in \mathbb{R}^{n_m}, y(t) \in \mathbb{R}^{n_p}, t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.8)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_m}$ et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de la sortie. La fonction $f : \mathbb{R}^{n_x \times n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ et la fonction $g : \mathbb{R}^{n_x \times n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_p}$ sont supposées de classe \mathcal{C}^∞ .

Respectivement, un système dynamique non linéaire à temps discret est représenté par l'expression suivante :

$$\sum_d : \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \\ x(0) = x_0 \\ x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(k) \in \mathbb{R}^{n_m}, y(k) \in \mathbb{R}^{n_p}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.9)$$

1.3.2 Système dynamique linéaire

Définition 1.3.1 *Un système linéaire invariant dans le temps (LTI) est un système linéaire dont le comportement est défini par un système d'équations différentielles linéaires à paramètres constants.*

Dans un modèle d'état, un système dynamique LTI est décrit en temps continu sous cette forme :

$$\sum_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(t) \in \mathbb{R}^{n_m}, y(t) \in \mathbb{R}^{n_p}, t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.10)$$

avec A , B , C et D respectivement la matrice d'état, la matrice de commande, la matrice d'observation et la matrice d'action directe.

En temps discret, il est écrit sous la forme suivante :

$$\sum_d : \begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \\ x(0) = x_0 \\ x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(k) \in \mathbb{R}^{n_m}, y(k) \in \mathbb{R}^{n_p}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.11)$$

Définition 1.3.2 *Un système linéaire variant dans le temps (LTV) est un système dont les matrices A , B , C et D varient dans le temps.*

Un système LTV est défini en temps continu sous la forme :

$$\sum_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(t) \in \mathbb{R}^{n_m}, y(t) \in \mathbb{R}^{n_p}, t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.12)$$

En discret, un système LTV est donné sous cette forme :

$$\sum_d : \begin{cases} x(k+1) = A_d(k)x(k) + B_d(k)u(k) \\ y(k) = C_d(k)x(k) + D_d(k)u(k) \\ x(0) = x_0 \\ x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(k) \in \mathbb{R}^{n_m}, y(k) \in \mathbb{R}^{n_p}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.13)$$

Remarque 1.3.1 Si on considère que les matrices de la représentation d'état sont fixes dans le temps, les systèmes LTV peuvent être vus comme des systèmes LTI.

Définition 1.3.3 Un système linéaire à paramètres variables LPV est un système dont les matrices de la représentation d'état dépendent de différents paramètres qui évoluent au cours du temps.

Un système LPV peut être représenté par un modèle d'état en temps continu sous la forme suivante :

$$\sum_c(\theta) : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \\ x(0) = x_0 \\ x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(t) \in \mathbb{R}^{n_m}, y(t) \in \mathbb{R}^{n_p}, t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (1.14)$$

avec $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_{n_\theta}(t)]$ représente le vecteur des paramètres du système, bornés et variants dans le temps. En temps discret, un système LPV peut être représenté sous la forme suivante :

$$\sum_d(\theta) : \begin{cases} x(k+1) = A(\theta(k))x(k) + B(\theta(k))u(k) \\ y(k) = C(\theta(k))x(k) + D(\theta(k))u(k) \\ x(0) = x_0 \\ x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}, u(k) \in \mathbb{R}^{n_m}, y(k) \in \mathbb{R}^{n_p}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1.15)$$

Remarque 1.3.2 Un système LPV est la généralisation des modèles linéaires invariants dans le temps (LTI) et des modèles linéaires variants dans le temps (LTV). En effet, lorsque $\theta(\cdot) = \theta(t)$, les systèmes LPV sont vus comme des systèmes LTV. En outre, lorsque $\theta(\cdot) = \theta$, est une constante, les systèmes LPV peuvent être considérés comme des systèmes LTI.

Les liens entre ces différents modèles peuvent se résumer par la figure (1.14).

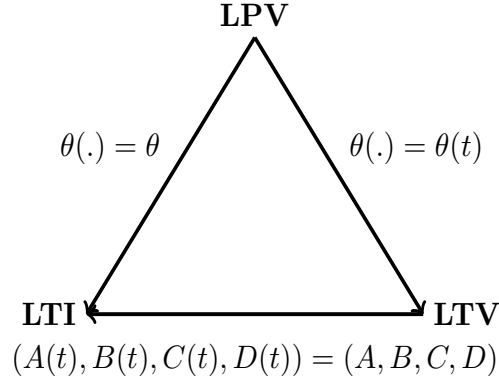


FIGURE 1.14 – Différentes classes de modèles linéaires

1.3.3 Propriétés sturcturelles des modèles

La stabilité, la commandabilité et l'observabilité sont des concepts développés pour la représentation d'état des systèmes. Pour le rappel de ces notions, considérons le système LTI décrit par l'équation (1.10) avec $u = 0$.

Définition 1.3.4 *Un système est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.*

$$\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0, \quad i = 1, \dots, n_x$$

A temps discret :

Un système discret est asymptotiquement stable si et seulement si tous les pôles de la matrice d'état A ont un module strictement inférieur à 1.

Remarque 1.3.3 *Un système est globalement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle négative.*

$$\text{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_x$$

Définition 1.3.5 *Le système est dit commandable sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, s'il est possible de déterminer une commande u finie définie sur cet intervalle, ramenant l'état initial $x(t_0)$ vers un état final $x(t_f)$.*

Le critère de Kalman de commandabilité [12] est donné par la matrice de commandabilité suivante :

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ \dots \ A^{n_x-1}B]$$

Le système est dit commandable, si et seulement si la matrice de commandabilité \mathcal{C} est de rang plein ($\text{rang}(\mathcal{C}) = n_x$).

Remarque 1.3.4 *Un système est dit stabilisable si toutes les valeurs propres instables de A sont commandables.*

Le critère de Hautus de stabilisation [13] est donné par :

$$H_c = [\lambda I - A \ B]$$

Le système est stabilisable, si et seulement si le rang de H_c est plein $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) \geq 0$.

Définition 1.3.6 *Un système est dit observable sur un intervalle de temps $[t_0, t_f]$ s'il est possible de déterminer $x(t_0)$ à partir de la trajectoire de la sortie $y(t)$ pour $0 \leq t \leq t_f$.*

Le critère d'observabilité de Kalman [12] est donné par la matrice d'observabilité suivante :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n_x-1} \end{bmatrix}$$

L'état est dit observable, si et seulement si la matrice d'observabilité \mathcal{O} est de rang plein ($\text{rang}(\mathcal{O}) = n_x$).

Remarque 1.3.5 *Le système est dit détectable si toutes les valeurs propres instables de A sont observables.*

Le critère de détectabilité de Hautus [13] est donné par :

$$S_d = \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

Le système est détectable si et seulement si le rang de S_d est plein $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) \geq 0$.

Remarque 1.3.6 : *Le système est dit gouvernable, s'il est à la fois stabilisable et détectable.*

La connaissance exacte des modèles n'est pas toujours possible, ce qui produit des incertitudes de modélisation. La détermination de l'influence des incertitudes des paramètres sur la réponse du modèle sera traitée dans le chapitre 2. Dans le paragraphe suivant, nous présentons les propriétés paramétriques des modèles.

1.3.4 Propriétés paramétriques des modèles

L'objectif de cette partie est de présenter les différents types d'incertitude qui peuvent affecter un système. Les propriétés statistiques caractérisant les paramètres seront expliquées par la suite.

1.3.4.1 Notion d'incertitudes

En pratique, il existe de nombreuses incertitudes qui peuvent affecter le système physique et donc le modèle. Elles peuvent être dues à un manque de connaissance des valeurs exactes des paramètres ou à la présence de certaines dynamiques dont la modélisation n'a pas été prise en compte. On distingue principalement deux classes d'incertitude induisant des variations en sortie du système : une incertitude non structurée et une incertitude paramétrique. La première est introduite dans [14] et dite incertitude dynamique ou fréquentielle. Elle englobe les dynamiques négligées ou approchées lors de l'étape de modélisation. La deuxième classe d'incertitudes est consacrée aux erreurs d'estimation ou aux variations des paramètres.

Dans la suite, nous nous intéressons aux incertitudes paramétriques, dont la modélisation mathématique des deux familles sera détaillée dans la partie suivante.

Un système incertain peut être écrit sous forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \\ y(t) = (C + \Delta C)x(t) + (D + \Delta D)u(t) \end{cases} \quad (1.16)$$

Incertitude affine : L'incertitude affine est introduite dans [15]. Elle dépend des paramètres de manière affine. La matrice d'état est ainsi donnée par :

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n_p} \theta_i A_i \quad \text{avec} \quad \theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$$

Dans cette représentation, les matrices A_i répartissent l'incertitude sur les différents éléments de la matrice $A(\theta)$. Cette incertitude forme un hyper-rectangle de dimension n_p dans l'espace d'état dont les sommets correspondent aux valeurs extrémales de $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta}]^T$.

Remarque 1.3.7 *Un système incertain LPV affine est donné par :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_i(t) A_i \right) x(t) + \left(B_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_i(t) B_i \right) u(t) \\ y(t) = \left(C_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_i(t) C_i \right) x(t) + \left(D_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \theta_i(t) D_i \right) u(t) \\ \theta_i(t) \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \end{cases}$$

avec $\underline{\theta}_i$ et $\bar{\theta}_i$ sont, respectivement, les valeurs minimale et maximale de θ_i .

Incertitude polytopique : L'incertitude polytopique est introduite dans [16]. Elle est définie telle que la matrice A appartienne au domaine de type polytopique suivant :

$$A(\theta) \in D_A := \left\{ A(\theta) = \sum_{i=1}^{n_p} \theta_i A_i; \theta_i \geq 0; \sum_{i=1}^{n_p} \theta_i = 1 \right\}$$

Le système polytopique est la combinaison des systèmes évalués aux sommets du polytope.

Remarque 1.3.8 *Un système incertain LPV polytopique est défini comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{2^{n_p}} \theta_i(t) A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^{2^{n_p}} \theta_i(t) B_i \right) u(t) \\ y(t) = \left(\sum_{i=1}^{2^{n_p}} \theta_i(t) C_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^{2^{n_p}} \theta_i(t) D_i \right) u(t) \\ \theta_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{2^{n_p}} \theta_i(t) = 1 \end{cases}$$

avec θ_i est appelé coordonnée polytopique.

Les caractéristiques statistiques des paramètres sont données en annexe.

1.4 Analyse de sensibilité des systèmes

Cette partie dresse un état de l'art des méthodes d'analyse de sensibilité. Dans un premier temps, nous présentons la différence entre l'analyse de sensibilité et l'analyse d'incertitude. Ensuite nous présenterons les différentes méthodes d'analyse de sensibilité. Enfin, une étude bibliographique sur les méthodes d'analyse de sensibilité des modèles à paramètres dépendants, est détaillée. La sortie d'un modèle est assujettie à différentes sources d'incertitude. Ces incertitudes peuvent être structurelles c'est-à-dire liées à la structure du modèle qui ne décrit pas parfaitement le comportement du système. Elles peuvent être aussi des incertitudes paramétriques qui résultent de l'intervalle d'incertitude de l'estimateur, comme elles peuvent être dues aux erreurs numériques qui proviennent de la discrétisation du modèle et la résolution numérique [17]. L'analyse d'incertitude permet de quantifier les incertitudes sur la sortie. Elle répond à la question : "quel est le niveau d'incertitude de la sortie induite par celui des paramètres ?" L'analyse de sensibilité permet de déterminer les paramètres les plus influents. Elle permet de répondre à la question : "Parmi les différents paramètres incertains, quels sont ceux qui induisent le plus d'incertitude sur la sortie ?" Nous considérons le modèle suivant sous forme de la relation entrée/sortie :

$$y = f(U, \theta)$$

où $y \in \mathbb{R}$ est la réponse du modèle et $U = (u_1, \dots, u_n)$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta})$ sont respectivement les variables d'entrée et les paramètres incertains du modèle. f est la fonction du modèle qui peut être linéaire ou non linéaire. L'analyse de sensibilité peut être utilisée pour les finalités suivantes :

- vérifier la structure du modèle : si l'analyse de sensibilité d'un paramètre, qui est réputé non influent, montre une forte contribution sur la variation de la sortie, dans ce cas la structure du modèle peut être mise en cause.

- hiérarchiser les facteurs : l'analyse de sensibilité permet de sélectionner les paramètres les plus influents et renseigne par la suite sur le niveau de précision que doit avoir les paramètres et l'attention qu'on doit leur accorder lors de leur détermination.
- simplifier la structure du modèle : en déterminant les paramètres les moins influents sur la réponse du modèle. Ils peuvent être fixés à leur valeur nominale ce qui implique par la suite la réduction du modèle.

Différentes techniques d'analyse de sensibilité sont présentées dans [18] ainsi que des exemples d'application dans différents domaines (chimie, sûreté nucléaire, physique, économie). Les méthodes d'analyse de sensibilité peuvent être classifiées en différentes catégories. Selon Frey [19], les méthodes peuvent être statistiques ou graphiques. Selon Saltelli [18], les méthodes d'analyse de sensibilité peuvent être classées en trois catégories : des méthodes de criblage ou "screening", des méthodes locales et des méthodes globales. Dans cette thèse, nous optons pour cette dernière classification. Les méthodes de criblage et locale seront brièvement expliquées et nous mettrons l'accent sur les méthodes globales. En effet, dans le domaine de l'automobile, les paramètres varient dans un intervalle large. Par conséquent, il est judicieux d'appliquer des méthodes globales d'analyse de sensibilité.

1.4.1 Méthodes d'analyse de sensibilité

1.4.1.1 Méthodes de criblage

Ces méthodes quantitatives permettent de hiérarchiser les variables d'entrée en fonction de leurs impacts sur la variation de la sortie [20, 21, 22]. Pour les modèles avec un nombre important de paramètres, ces méthodes sont généralement utilisées dans une première étape afin de déterminer le groupe des paramètres le plus influent. Puis, d'autres méthodes plus précises seront appliquées.

1.4.1.2 Méthodes locales

Les méthodes locales d'analyse de sensibilité évaluent quantitativement l'impact d'une petite variation autour d'une valeur donnée des entrées. Elles reposent sur le calcul d'un indice de sensibilité quantifiant les variations d'une sortie du modèle suite à une faible variation d'un paramètre. À chaque facteur, une valeur nominale de référence est attribuée. L'analyse de sensibilité s'effectue en variant la valeur de référence d'un facteur et en fixant tous les autres paramètres d'entrée à leur valeur nominale. Ces méthodes sont quantitatives et sont souvent utilisées dans la chimie où l'influence des variations de paramètres cinétiques autour d'une valeur donnée est étudiée [23]. L'indice de sensibilité mesurant l'impact de la variation d'un paramètre $\theta_i \in \theta$ autour

d'un point de fonctionnement sur la sortie y est donné par :

$$S = \frac{\partial y}{\partial \theta_i} \quad (1.17)$$

Les paramètres avec l'indice de sensibilité le plus grand sont les plus influents. Cependant, les approches locales fournissent une information partielle en étudiant l'influence des paramètres autour d'un point de fonctionnement et ne tiennent pas compte de toute la plage de variation des paramètres.

1.4.1.3 Méthodes globales

Les méthodes d'analyse de sensibilité globales permettent de quantifier l'influence des différents paramètres incertains sur l'entière plage de variation de la sortie d'un modèle. L'objectif de cette section est de présenter différentes méthodes globales d'analyse de sensibilité ainsi que les indices de sensibilité obtenus par chacune d'elles [24]. On suppose dans cette partie que y est de variance non nulle.

Les différentes approches nous semblant les plus intéressantes, sont présentées ci-dessous.

Mesures d'importance

Considérons le modèle linéaire suivant :

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i \theta_i \quad (1.18)$$

Les principales mesures d'importance sont :

- le coefficient de régression standard SRC . Il exprime la variance de la sortie y due à la variance du paramètre θ_i et il est défini par :

$$SRC_i = \frac{\beta_i^2 V(\theta_i)}{V(y)} \quad (1.19)$$

- le coefficient de corrélation (appelé aussi le coefficient de corrélation de Pearson). Il permet de détecter la présence d'une relation linéaire entre le paramètre θ_i et la sortie du modèle y . Il est exprimé comme suit :

$$\rho_{\theta,y} = \beta_i \sqrt{\frac{V(\theta_i)}{V(y)}} \quad (1.20)$$

Ces méthodes sont utilisées pour des modèles linéaires.

Nous présentons dans la suite des méthodes d'analyse de sensibilité globales qui ne font pas d'hypothèse sur le modèle mais supposent l'indépendance des paramètres.

Réseaux de neurones

L'utilisation des réseaux de neurones comme une technique d'analyse de sensibilité a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Parmi ces travaux, nous citerons [25, 26, 27] où les auteurs cherchent des expressions des indices déterminant l'influence de la variation de l'entrée sur la

sortie. Des indices de sensibilité calculés analytiquement ont été proposés dans [28, 29], ainsi que des indices de sensibilité déterminés en fonction des poids caractérisant le comportement des réseaux [25, 30].

Bien que les réseaux de neurones sont des outils capables de développer un modèle sans disposer de formule exprimant le phénomène à modéliser, ils présentent différents inconvénients. Ils sont coûteux en temps de calcul (le temps d'apprentissage risque d'être démesuré) et il est difficile de déterminer la bonne structure permettant au réseau de bien apprendre les exemples (nombre de neurones d'entrée, sortie, neurones cachés).

Approche de Sobol pour le calcul des indices de sensibilité

Pour quantifier l'influence de l'incertitude d'un paramètre sur la sortie du modèle, on calcule un indice de sensibilité, appelé indice de Sobol [31]. Il est défini par :

$$S_i = \frac{V[E(y|\theta_i)]}{V(y)} = \frac{V_i}{V} \quad (1.21)$$

où :

- $V(y)$ est la variance de la réponse y .
- $E(y|\theta_i)$ est l'espérance conditionnelle obtenue en fixant θ_i .

L'indice de sensibilité S_i est compris entre 0 et 1. Plus l'indice est proche de 1, plus le paramètre θ_i est influent.

Cet indice de sensibilité est appelé indice du 1^{er} ordre. Il représente l'influence individuelle du paramètre sur la sortie. Il existe des indices de sensibilité d'ordre supérieur. Par exemple, l'indice du second ordre traduit l'influence de l'interaction du paramètre avec un autre paramètre sur la sortie. Il est défini par :

$$S_{ij} = \frac{V(E[(y|\theta_i, \theta_j)]) - V_i - V_j}{V(y)} \quad (1.22)$$

où $E(y|\theta_i, \theta_j)$ est l'espérance conditionnelle obtenue en fixant θ_i et θ_j .

En outre, l'indice de sensibilité total représente l'influence individuelle du paramètre et celle de son interaction avec les autres paramètres. Il est défini par :

$$S_{T_i} = S_i + \sum_{j \neq i} S_{ij} + \sum_{j \neq i, k \neq i, j < k} S_{ijk} + \dots \quad (1.23)$$

Remarque 1.4.1 : *Le calcul analytique est parfois difficile (boîte noire, grand nombre de paramètres ...). Afin de pallier ce problème, il est nécessaire d'estimer les indices de sensibilité.*

1.4.1.4 Estimation des indices de sensibilité

Dans cette section, nous nous focalisons sur les méthodes d'estimation des indices de sensibilité. Il est à noter que ces méthodes sont globales et supposent l'indépendance des paramètres.

Méthode de Monte-Carlo

Cette méthode considère deux échantillons aléatoires générés dans l'intervalle de variation des paramètres. Ces deux échantillons sont ensuite combinés et la sortie est calculée pour chacun des jeux des paramètres effectués [31, 32]. Un indice de premier ordre estimé est donné comme suit :

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{U}_i - (\hat{E}(y))^2}{\hat{V}} \quad (1.24)$$

où $\hat{E}(y)$ et \hat{V} sont l'espérance et la variance de y estimée. \hat{U}_i est l'estimé de l'espérance du carré de l'espérance de y conditionnellement à θ_i .

$$\hat{V}_{ij} = \hat{U}_{ij} - (\hat{E}(y))^2 - V_i - V_j \quad (1.25)$$

La quantité \hat{U}_{ij} est obtenue en variant toutes les variables sauf θ_i et θ_j .

Pour améliorer la convergence de la méthode de Monte-Carlo (MC), McKay [33] a modifié la méthode de Monte-Carlo en se basant essentiellement sur l'échantillonnage Latin Hypercube (LHS). Ce dernier permet une meilleure exploration de l'espace des paramètres et fournit donc des résultats fiables en sortie dans la plupart des cas et ce, pour un nombre de simulations inférieur comparé à l'échantillonnage de Monte-Carlo. La méthode proposée consiste à construire r répliques (paquet de N échantillons) et à combiner les différentes répliques. Cette approche permet de réduire le nombre d'évaluations à $N \times r$ mais elle ne permet pas d'estimer les indices de sensibilité totaux.

Méthode FAST

La méthode FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) [34, 35] consiste à faire varier chaque paramètre selon une fonction sinusoïdale à une fréquence distincte et déterminer une décomposition de la variance de la sortie y en utilisant la transformée de Fourier. Les fréquences prédominantes dans la transformée de Fourier de la sortie correspondent à celles des paramètres les plus influents. Cette approche a l'avantage d'être moins coûteuse en temps de calcul comparé à la méthode de Monte-Carlo, mais la difficulté réside dans le choix de la fréquence.

Métamodèle

Le principe consiste à approximer le modèle par un autre modèle, appelé "métamodèle" ou "surface de réponse" [36], moins coûteux à évaluer. Les métamodèles fréquemment utilisés sont de type polynomiaux (splines, polynômes du chaos, ...). Il est à noter que les coefficients des polynômes sont directement liés aux indices de sensibilité de Sobol.

1.4.1.5 Exemple et comparaison des méthodes

Dans ce paragraphe nous présentons une brève étude comparative des méthodes d'estimation des indices de sensibilité, basées sur la décomposition de la variance, citée dans le paragraphe

précédent.

Considérons le modèle d'Ishigami [37] :

$$y = \sin(\theta_1) + 7 \sin^2(\theta_2) + \frac{\theta_3^4}{10} \sin(\theta_1)$$

où les θ_i , $i = 1, 2, 3$, sont les paramètres incertains et suivent une distribution choisie uniforme sur $[-\pi, \pi]$, pour cette étude, et y la sortie. L'objectif est de chercher le paramètre θ_i le plus influent sur y .

Les indices de sensibilité sont calculés pour différentes tailles d'échantillons de simulation 50, 100, 1000 et 2000.

Les figures (1.15), (1.16) et (1.17) illustrent les résultats obtenus.

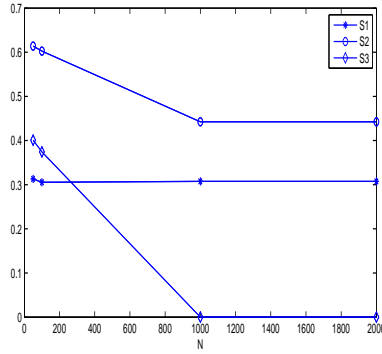


FIGURE 1.15 – Indices obtenus par la méthode Fast

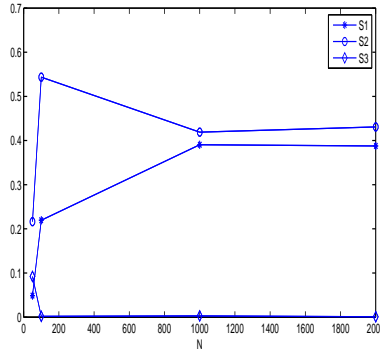


FIGURE 1.16 – Indices obtenus par les polynômes du chaos

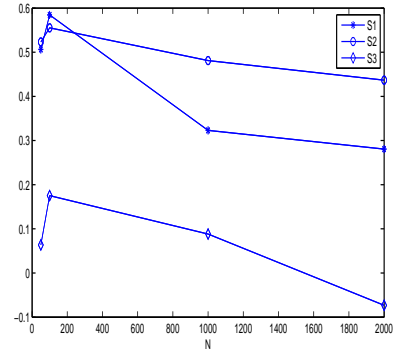


FIGURE 1.17 – Indices obtenus par la méthode de Monte-Carlo

Les indices de sensibilité de premier ordre S_1 , S_2 et S_3 correspondent respectivement aux paramètres θ_1 , θ_2 et θ_3 .

Nous remarquons que le paramètre le plus influent est le paramètre θ_2 ($S_2 \approx 0,43$). Ensuite vient le paramètre θ_1 ($S_1 \approx 0,37$). Cependant θ_3 n'a aucune influence sur la variation de y ($S_3 \approx 0,00$). La méthode Fast et les polynômes du chaos nécessitent une taille d'échantillon de 1000 pour avoir des estimations correctes des indices. Cependant une taille d'échantillons de 1000 n'assure pas la convergence des indices par la méthode de Monte-Carlo. A noter que les valeurs négatives des indices, obtenus par la méthode de Monte-Carlo, sont expliquées par une insuffisance d'échantillons.

Les différentes méthodes d'analyse basées sur la décomposition de la variance sont comparées dans le tableau ci-dessous. Les principaux critères de comparaison sont le nombre d'échantillons de simulation à effectuer, la nécessité d'une connaissance a priori du modèle et l'accès aux différents indices de sensibilité (dont les interactions).

Méthode	Avantages	Inconvénients
FAST	- nombre limité de simulations	- pas complètement satisfaisant sur les interactions - le choix des fréquences n'est pas évident
Monte-Carlo	- accès à l'ensemble des indices de sensibilité	- coût de calculs important - nécessite une connaissance a priori de la structure de modèle
Mckay	- nombre limité de simulations	- accès à un nombre limité d'indices de sensibilité (pas d'interactions)
Polynômes du chaos	- nombre limité de simulations à effectuer - accès à l'ensemble des indices de sensibilité - approximation de la sortie par un polynôme (dont les interactions)	- approche compliquée lorsque le nombre de variables est grand

TABLE 1.1 – Comparaison des méthodes d'estimation des indices de sensibilité

1.4.2 Analyse de sensibilité des modèles à paramètres dépendants

Dans la section précédente, nous avons présenté des méthodes d'analyse de sensibilité pour les modèles à paramètres indépendants. En pratique, l'hypothèse d'indépendance des paramètres peut s'avérer non réaliste. Dans cette section, nous présentons une étude bibliographique chronologique des publications sur les méthodes d'analyse de sensibilité pour les modèles à paramètres dépendants.

En 1995, Mckay [33] a étendu sa méthode d'estimation des indices de sensibilité pour des paramètres dépendants. Il a proposé des indices de sensibilité de premier ordre obtenus en exploitant les travaux d'Iman et Conover [38] pour garder la dépendance des paramètres lors des réplifications. Cependant, de nombreuses évaluations de modèle sont requises afin d'atteindre une précision raisonnable des indices.

En 1998, Bedford [39] a proposé de décorréler les paramètres dépendants en utilisant l'approche de Gram Schmidt. Par la suite, la décomposition de la variance des paramètres indépendants est adoptée. L'inconvénient de cette idée réside dans le fait que les indices de sensibilité calculés dé-

pendent du procédé d'orthogonalisation choisi qui, dans ce cas, n'est pas unique, et précisément l'ordre dans lequel les fonctions sont orthogonalisées. En plus, les indices de sensibilité obtenus correspondent aux paramètres orthogonalisés qui ne sont plus exactement les paramètres du modèle [40]. Dans la même année, les coefficients SRC ont été utilisés par RamaRao [41] dans le cas d'un modèle à paramètres dépendants. Il a montré que ces coefficients peuvent être reliés à l'augmentation du coefficient de détermination lorsqu'une variable est ajoutée au modèle de régression.

En 2002, un intérêt particulier a été porté à l'étude de sensibilité des modèles à paramètres corrélés. En effet, Saltelli et Tarantola [42] ont proposé un algorithme pour identifier le paramètre le plus influent dans le cas des paramètres dépendants. L'indice de premier ordre est estimé en utilisant la méthode de Monte-Carlo. L'inconvénient majeur de cette approche est le temps de calcul qui est coûteux.

Récemment, en 2008, Xu et Gertner [43] ont proposé une méthode permettant de distinguer des contributions structurelles et corrélatives des paramètres. En effet, la méthode adoptée est basée sur la régression et consiste à décomposer qualitativement la variance de la sortie du modèle en une variance partielle fournie par la corrélation des paramètres et une autre fournie par les variations de paramètres non corrélés.

En 2004, Julien Jacques [40] a proposé de regrouper les paramètres indépendants et d'exprimer la sensibilité de groupes de paramètres. Il a défini une méthode d'estimation de ces indices de sensibilité multidimensionnels, basée sur des simulations de Monte-Carlo.

Rabitz et al [44] ont introduit une approche qui se base sur la décomposition de la covariance de la variance inconditionnelle de la sortie. Cette méthode permet de calculer les indices de sensibilité des paramètres indépendants et/ou corrélés. Comme Xu et Gertner, ils ont distingué deux indices. Le premier quantifie la contribution du paramètre tout seul et le deuxième quantifie la contribution due à la corrélation avec les autres paramètres. Les indices de sensibilité sont déterminés en adoptant une approche métamodèle et en particulier le " Random-Sampling High Dimensional Model Representation (RS-HDMR) ". Les fonctions composants le RS-HDMR sont approchées par des décompositions en termes de fonctions de base (des polynômes, splines, etc). Cette approche présente quelques questions critiques telle que la non-unicité de la décomposition fonctionnelle.

En 2012, Mara [45] a proposé de passer par une étape de décorrélation des paramètres par Gram Schmidt et a appliqué après la technique de la décomposition de la variance (ANOVA) en utilisant les paramètres décorrélés. Néanmoins, l'orthogonalisation ne fournit pas un ensemble unique de paramètres décorrélés. Par conséquent, un grand nombre d'ensembles doit être généré pour l'interprétation des indices obtenus.

Supposant que la fonction conjointe de distribution est bornée, Chastaing [46] a prouvé qu'une décomposition de Hoeffding est possible. Elle a proposé de nouveaux indices de sensibilité mesurant

l'influence des paramètres seuls et son influence due à sa corrélation avec les autres paramètres.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé dans un premier temps les éléments nécessaires à la compréhension de la dynamique du véhicule automobile. Ensuite, nous avons exposé les différentes caractéristiques structurelles et paramétriques des modèles dynamiques. Enfin, nous avons présenté les différentes techniques d'analyse de sensibilité existantes dans la littérature. Généralement, ces méthodes supposent que leurs paramètres sont indépendants et suivent une distribution connue. En pratique, l'hypothèse d'indépendance des paramètres peut s'avérer non réaliste. En particulier, dans le domaine de l'automobile, les paramètres peuvent être dépendants. De plus, peu de mesures sont souvent disponibles car elles sont coûteuses à mettre œuvre. Nous avons constaté au cours de l'étude bibliographique des méthodes d'analyse de sensibilité que l'approche via les polynômes du chaos est une approche efficace et rigoureuse, puisqu'elle nous fournit les indices de sensibilité quantifiant l'influence d'un paramètre seul ainsi que son interaction avec les autres paramètres. En outre, elle ne nécessite pas un nombre important d'échantillons de simulation. Cependant, cette approche suppose que les paramètres sont indépendants et suivent une distribution connue. Dans le chapitre suivant, nous proposons une méthodologie basée sur les polynômes du chaos pour les modèles à paramètres corrélés et à distribution arbitraire.

2

Analyse de sensibilité des modèles à paramètres dépendants

Sommaire

2.1	Introduction	45
2.2	Motivation d'une analyse de sensibilité statique	45
2.3	Analyse de sensibilité des modèles à paramètres indépendants	46
2.3.1	Représentation d'ANOVA	46
2.3.2	Les polynômes du chaos	48
2.4	Analyse de sensibilité des modèles à paramètres dépendants et distribution arbitraire	53
2.4.1	Méthodologie	54
2.4.2	Procédé de décomposition des paramètres d'entrée	55
2.4.3	Construction d'une base orthonormale	56
2.4.4	Indices de sensibilité estimés par les polynômes du chaos	59
2.5	Application	60
2.5.1	Cas d'un modèle à paramètres indépendants et distribution arbitraire	62
2.5.2	Cas d'un modèle à paramètres dépendants et distribution arbitraire	65
2.6	Conclusion	69

2.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, la décomposition de la variance de la sortie d'un modèle est une technique qui ne peut être réalisée que sous l'hypothèse d'indépendance des paramètres, afin d'assurer l'unicité de la décomposition. Cependant, dans le domaine de l'automobile, les modèles peuvent avoir des structures complexes et font intervenir des paramètres qui sont bien souvent dépendants. Dans ce chapitre, une nouvelle méthode d'analyse de sensibilité globale est proposée pour des modèles à paramètres dépendants et suivant une distribution arbitraire. Dans une première partie, nous décrivons la méthode basée sur la décomposition de la variance (ANOVA) [24, 31] ainsi que l'approche des polynômes du chaos pour l'estimation des indices de sensibilité. Dans la seconde partie, nous proposons une extension de l'approche basée sur les polynômes du chaos pour s'affranchir des limites d'indépendance et de la distribution des paramètres du modèle. Dans la dernière partie, nous étudions la sensibilité de la force latérale d'un modèle de pneumatique relativement à la variation de ses paramètres supposés dépendants et suivant une distribution arbitraire.

2.2 Motivation d'une analyse de sensibilité statique

L'analyse de sensibilité globale est basée sur des outils statistiques. Cette méthode consiste à faire varier les paramètres du modèle à étudier un par un et ensuite à observer l'effet de cette variation sur la sortie du modèle. Les indices de sensibilité quantifiant l'influence des paramètres sur la sortie, dépendent toujours de la liste des échantillons des paramètres. En outre, cette influence est liée à la sortie et, explicitement, au modèle qui peut être de type boîte noire (figure (2.1)).

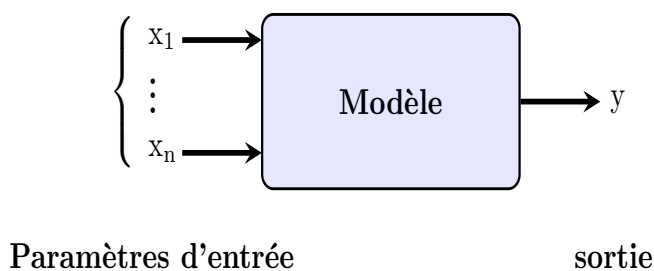


FIGURE 2.1 – Modèle entrée-sortie.

où $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, est le vecteur de paramètres et y est la sortie du modèle. Dans ce chapitre, X représente le vecteur des paramètres incertains. Cette notation est communément employée dans la littérature et ne doit pas être confondue avec le vecteur d'état, appelé aussi x dans le chapitre précédent.

La méthode d'analyse de sensibilité la plus utilisée en pratique est basée sur la décomposition de la variance qui repose sur l'hypothèse que tous les paramètres sont indépendants. Dans le domaine de l'automobile, certains paramètres sont dépendants tels que la rigidité latérale du véhicule et la charge verticale, dépendance dont il faut absolument tenir compte dans l'analyse de sensibilité. En outre, souvent, peu de mesures sont disponibles car elles sont coûteuses et difficiles à mettre en œuvre. Les mesures peuvent alors, suivre une distribution arbitraire qui ne vérifient pas les hypothèses pour appliquer les méthodes d'estimation des indices de sensibilité qui se basent sur la décomposition de la variance. Il est alors judicieux de développer des techniques pour prendre en compte la dépendance ainsi que la distribution arbitraire des paramètres lors de l'analyse de sensibilité.

Dans la suite, nous considérons un modèle mathématique sous la forme suivante :

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

avec $y \in \mathbb{R}$ la sortie du modèle, $x_i \in \mathbb{R}$, $i=1, \dots, n$, les n paramètres incertains et f est une fonction connue de carré intégrable ($f \in L^2$) .

Le but de l'analyse est de déterminer comment les incertitudes des paramètres x_i influent sur la sortie y . Pour cela, la variance de la sortie est décomposée en une somme de contributions de chaque paramètres et de leur interaction, comme rappelé dans la section suivante. Le calcul analytique des indices de sensibilité n'étant pas toujours possible, il est nécessaire de les estimer. L'approche basée sur les polynômes du chaos sera présentée pour l'estimation des indices de sensibilité.

2.3 Analyse de sensibilité des modèles à paramètres indépendants

Cette section a pour objectif la présentation de la méthode de la décomposition de la variance. Les paramètres $x_i \in \mathbb{R}$, $i=1, \dots, n$ sont considérés comme des variables aléatoires, indépendantes et définies sur l'hypercube unité.

2.3.1 Représentation d'ANOVA

Des indices de sensibilité quantifiant l'influence des paramètres du modèle sont introduits par Sobol dans [31]. Ces indices sont déterminés en se basant sur la décomposition de la fonction f en somme de fonctions de dimensions croissantes [47].

Supposons que f possède une variance finie. Alors f peut être décomposée en une somme de fonctions de dimension croissante [47] :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.2)$$

La décomposition est unique si f_0 est une constante et les fonctions de la décomposition vérifient les conditions équivalentes suivantes [31] :

$$\int_0^1 f_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_k} = 0 \quad \forall k = 1, \dots, s, \quad \forall \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\} \quad (2.3)$$

où :

$$E(f_{i_1 \dots i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \times f_{j_1 \dots j_s}(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})) = 0, \text{ si } \{i_1, \dots, i_s\} \neq \{j_1, \dots, j_s\} \quad (2.4)$$

avec $E(\cdot) = \int_{I^n} (\cdot) dx$ est l'espérance mathématique.

L'espérance de y s'écrit comme suit :

$$E(y) = \int f(x_1, \dots, x_n) p_x dx = f_0 \quad (2.5)$$

De même, en prenant l'espérance de y conditionnellement à x_i , puis à x_i et x_j , et ainsi de suite, on obtient :

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= E(y | x_i) - f_0 \\ f_{i,j}(x_i, x_j) &= E(y | x_i, x_j) - f_i(x_i) - f_j(x_j) - f_0 \\ f_i(x_i, x_j, x_k) &= E(y | x_i, x_j, x_k) - f_{i,j}(x_i, x_j) - f_{i,k}(x_i, x_k) - f_{j,k}(x_j, x_k) \\ &\quad - f_i(x_i) - f_j(x_j) - f_k(x_k) - f_0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

En utilisant les équations (2.2) et (2.4), la variance de y peut être décomposée de la manière suivante :

$$V(y) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1 \dots n} \quad (2.7)$$

où :

$$\begin{aligned} V_i &= V(E(y | x_i)) = E(E(y | x_i)^2) - E(E(y | x_i))^2 \\ V_{ij} &= V(E(y | x_i, x_j)) - V_i - V_j \\ V_{ijk} &= V(E(y | x_i, x_j, x_k)) - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk} - V_i - V_j - V_k \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$V_{1 \dots n} = V - \sum_{i=1}^n V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} V_{i_1 \dots i_{n-1}}$$

Définition 2.3.1 Les indices de sensibilité, appelés indices de Sobol [31], vérifient l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^n S_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_{ij} + \dots + S_{1 \dots n} = 1 \quad (2.9)$$

où S_i est l'indice de sensibilité de premier ordre. Il quantifie l'influence du paramètre x_i sur la sortie y et est exprimé de la façon suivante :

$$S_i = \frac{V_i}{V(y)} = \frac{V(E(y|x_i))}{V(y)} \quad (2.10)$$

où $V_i = V(E(y|x_i))$ représente la variance de l'espérance conditionnelle de y au paramètre x_i et $V(y)$ la variance totale de y .

L'indice de sensibilité S_i est compris entre 0 et 1 et plus l'indice est proche de 1, plus le paramètre x_i est influent.

S_{ij} est un indice de sensibilité d'ordre 2. Il exprime l'influence due à l'interaction entre x_i et x_j et s'exprime de la façon suivante :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V(y)} \quad (2.11)$$

Les indices de sensibilité d'ordre supérieur sont définis suivant le même principe.

Un indice de sensibilité S_{T_i} de x_i dit total, reflète l'influence individuelle et collective de x_i et est défini par :

$$S_{T_i} = S_i + \sum_{j \neq i} S_{ij} + \sum_{j \neq i, k \neq i, j < k} S_{ijk} + \dots \quad (2.12)$$

Le calcul analytique de ces indices s'avère parfois être difficile (nombre important de paramètres, structure de modèle très complexe, ...). Pour pallier ce problème, l'estimation des indices est nécessaire. Dans la littérature, différentes méthodes d'estimation des indices de sensibilité ont été proposées [35, 48]. L'approche Monte-Carlo [32] est la plus utilisée. Cependant, dans le chapitre précédent nous avons vu que le nombre d'évaluations du modèle peut devenir élevé et coûteux en temps de calcul. Pour résoudre ce problème, le modèle est remplacé par une approximation analytique, par exemple, de type polynomial, qui nous semble intéressante compte tenu de la problématique présentée précédemment.

Nous présentons alors un type de décomposition polynomiale, celle des polynômes du chaos.

2.3.2 Les polynômes du chaos

Les polynômes du chaos sont issus des travaux de Wiener en 1938 [49] qui a cherché à représenter la sortie d'un modèle mécanique en fonction de paramètres d'entrée. Il a montré que toute variable aléatoire qui suit une loi normale et qui possède une variance finie, peut être représentée par une décomposition en polynômes de Hermite, formant ainsi une base orthogonale. De nombreux travaux ont été menés pour l'utilisation des polynômes du chaos en analyse de sensibilité [23, 50]. Dans la suite, nous introduisons le principe des polynômes du chaos et sa mise en œuvre.

2.3.2.1 Principe

Considérons le modèle donné par l'équation (2.1) et supposons que y est de variance finie (moment d'ordre deux non nul). La sortie y du modèle peut alors s'exprimer comme suit :

$$y = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \psi_j(x_1, \dots, x_n) \quad (2.13)$$

avec a_j des coefficients à déterminer et ψ_j des polynômes multivariés qui dépendent de x_1, \dots, x_n et qui résultent du produit tensoriel des polynômes unidimensionnels $\phi_{\alpha_k^j}(x_k)$:

$$\psi_j(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \phi_{\alpha_k^j}(x_k) \quad (2.14)$$

Le terme α_k^j représente le degré des polynômes $\phi_{\alpha_k^j}(x_k)$. Le degré α^j du polynôme ψ_j n'excède pas le degré p souhaité tel que la relation suivante soit vérifiée, pour j donné :

$$\alpha^j = \sum_{k=1}^n \alpha_k^j \leq p \quad (2.15)$$

En pratique, seul un nombre fini de coefficients peut être calculé. Le développement est tronqué à l'ordre fini M qui est égal à C_{n+p}^n [51]. Le nombre de coefficients M est ainsi lié à n et p . Le développement associé s'écrit sous la forme suivante :

$$y \approx \sum_{j=0}^M a_j \psi_j(x_1, \dots, x_n) \quad (2.16)$$

Ordre du polynôme du chaos

Le choix du degré p du polynôme du chaos est crucial pour une bonne approximation. Il dépend de la densité de la variable aléatoire qu'on cherche à présenter [52]. Le contrôle de l'erreur de troncature est peu abordé dans la littérature. Néanmoins, un degré p égal à 2 ou 3 peut parfois être suffisant pour une représentation de la sortie du système [53].

Choix des polynômes orthogonaux

Les polynômes ψ_j constituent une base associée aux paramètres du modèle. Dans [49], Wiener a utilisé les polynômes de Hermite en considérant que ses variables aléatoires suivent une distribution Gaussienne centrée et réduite. L'approche basée sur les polynômes du chaos a été généralisée dans [54, 55, 56] aux développements basés sur une large classe de polynômes orthogonaux (Hermite, Legendre, Laguerre, Chebychev, Jacobi, ...).

Le tableau suivant donne quelques distributions des variables possibles et les familles des polynômes orthogonaux associés pour la construction des polynômes du chaos.

	Distribution	Support	Polynômes
VA continue	Gaussienne	$] \infty, +\infty[$	Hermite
	Uniforme	$[-1, 1]$	Legendre
	Gamma	$[0, +\infty[$	Laguerre
	Chebyshev	$[-1, 1]$	Chebyshev
	Beta	$[-1, 1]$	Jacobi
VA discrète	Poisson	$\{0, 1, \dots\}$	Carlier
	Binomiale	$\{0, 1, \dots, N\}$	Krawtchouk
	Binomiale négative	$\{0, 1, \dots\}$	Meiwner

TABLE 2.1 – Polynômes associés à chaque type de distribution

Remarque 2.3.1 *Les polynômes du chaos (PC) doivent former une base orthogonale afin d'assurer l'unicité de la décomposition. Pour cela, une famille de polynômes correspond à chaque distribution donnée des paramètres. Cependant, en pratique, les paramètres peuvent suivre une distribution arbitraire. Dans ce cas, il convient de transformer les paramètres en variables suivant une distribution connue ou bien de construire une base orthogonale associée à une distribution arbitraire des paramètres, ce qui sera présenté dans la section 2.4.*

2.3.2.2 Estimation des coefficients du polynôme du chaos

Dans la littérature, deux classes principales de méthodes ont été développées pour calculer les coefficients des polynômes du chaos : la méthode de projection [57] et la méthode de régression [58]. Dans la suite nous présentons ces deux méthodes.

Méthode de projection

Cette technique consiste à projeter la sortie du modèle sur la base des polynômes du chaos. La multiplication de l'équation (2.16) par ψ_j et en ajoutant un opérateur d'espérance, pour j donné, conduit à :

$$E(y\psi_j(x_1, \dots, x_n)) = E\left(\sum_{i=1}^M a_i \psi_i(x_1, \dots, x_n) \psi_j(x_1, \dots, x_n)\right) = \sum_{i=1}^M a_i E(\psi_i(x_1, \dots, x_n) \psi_j(x_1, \dots, x_n)) \quad (2.17)$$

En exploitant l'orthogonalité de la base des polynômes du chaos $E[\psi_i \psi_j] = 0$ si $i \neq j$, on peut écrire :

$$E[y\psi_j(x_1, \dots, x_n)] = a_j E(\psi_j^2(x_1, \dots, x_n)) \quad (2.18)$$

Le coefficient \hat{a}_j peut alors être déterminé par l'expression suivante :

$$\hat{a}_j = \frac{E[y\psi_j(x_1, \dots, x_n)]}{E[\psi_j^2(x_1, \dots, x_n)]} \quad (2.19)$$

Méthode de régression

La méthode de régression consiste à déterminer les coefficients \hat{a}_j de la décomposition en polynômes du chaos aux sens des moindres carrés.

Soient $A \in \mathbb{R}^M$ le vecteur des coefficients a_j , $j = 0, \dots, M$, à déterminer, Y le vecteur de N échantillons de la sortie y , noté $Y = (y^{(1)}, \dots, y^{(N)})^T$, où $y^{(i)}$ représente le $i^{\text{ème}}$ échantillon de la sortie. Soit Z la matrice contenant les polynômes ψ_j telle que :

$$Z = \begin{pmatrix} \psi_0(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) & \dots & \psi_M(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_0(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}) & \dots & \psi_M(x_1^{(N)}, \dots, x_n^{(N)}) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où $x_k^{(i)}$ représente le $i^{\text{ème}}$ échantillon de x_k .

L'objectif peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\hat{a}_j = \arg \min_a \sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - a_j^T \psi_j \left((x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \right) \right)^2 \quad (2.21)$$

Le vecteur de sortie y est donné par $Y = ZA$. L'estimation du vecteur A noté \hat{A} , peut être obtenu par la méthode des moindres carrés :

$$\hat{A} = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y \quad (2.22)$$

La sortie estimée $\hat{Y} = (\hat{y}^{(1)} \dots \hat{y}^{(N)})^T$ est ainsi donnée par l'expression suivante :

$$\hat{Y} = Z\hat{A} \quad (2.23)$$

Erreur d'estimation

Il est également important de pouvoir évaluer l'erreur d'approximation commise avec l'utilisation des polynômes du chaos. Un coefficient de détermination R^2 [59] est alors proposée pour quantifier l'erreur d'approximation par les polynômes du chaos. Ce coefficient est donné par l'expression suivante :

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^2}{V(y)} \quad (2.24)$$

où $V(y)$ est la variance de y estimée par :

$$\hat{V}(y) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(y^{(i)} - \hat{E}[y] \right)^2 \quad \text{avec} \quad \hat{E}(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{(i)} \quad (2.25)$$

Ainsi, $R^2 \approx 1$ indique une forte adéquation, alors que $R^2 \approx 0$ indique une mauvaise correspondance. Cependant ce coefficient a tendance à sous estimer l'erreur d'approximation, d'où la proposition d'un coefficient ajusté R_{ajust}^2 exprimé comme suit :

$$R_{ajust}^2 = 1 - \frac{N-1}{N-p-1}(1-R^2) \quad (2.26)$$

2.3.2.3 Indices de sensibilité estimés

Sudret [58] a montré que les indices de Sobol peuvent être déterminés à partir de la décomposition en polynômes du chaos. En effet, après l'obtention des coefficients des polynômes du chaos comme expliqué précédemment, il est possible de réordonner les différents termes du polynôme obtenu, par ordre de degré polynomial total croissant, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y \approx & a_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \Gamma_k} a_j \psi_j(\mathbf{x}_k) \\ & + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \sum_{j \in \Gamma_{k_1, k_2}} a_j \psi_j(\mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}) \\ & + \dots + \sum_{1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_s \leq n} \sum_{j \in \Gamma_{k_1, \dots, k_s}} a_j \psi_j(\mathbf{x}_{k_1}, \dots, \mathbf{x}_{k_s}) \\ & + \dots + \sum_{j \in \Gamma_{1, \dots, M}} a_j \psi_j(\mathbf{x}_{k_1}, \dots, \mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (2.27)$$

avec Γ_{k_1, \dots, k_s} l'ensemble des multi-indices j qui correspond aux polynômes dépendant uniquement des paramètres $\mathbf{x}_{k_1}, \dots, \mathbf{x}_{k_s}$, $\forall \{k_1, \dots, k_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}$.

D'après l'expression (2.27), l'estimée de l'indice de sensibilité du premier ordre \hat{S}_i est donnée par :

$$\hat{S}_i = \frac{\sum_{j \in \Gamma_i} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(\mathbf{x}_i))}{\sum_{j=1}^M \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))} \quad (2.28)$$

où \hat{a}_j sont les coefficients estimés par (2.21). L'ensemble Γ_i correspond aux polynômes ψ_j dépendant uniquement de \mathbf{x}_i .

De la même manière, l'estimation de l'indice de sensibilité \hat{S}_{ij} dû à l'interaction entre les variables \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j est :

$$\hat{S}_{ij} = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{ij}} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j))}{\sum_{j=1}^M \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n))} \quad (2.29)$$

L'ensemble Γ_{ij} correspond aux polynômes ψ_{ij} dépendant uniquement de x_i et de x_j . Par ailleurs, l'indice de sensibilité total estimé S_{T_i} est écrit sous cette forme :

$$\hat{S}_{T_i} = \frac{\sum_{j \in \Gamma_{i+}} \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(x_i))}{\sum_{j=1}^M \hat{a}_j^2 E(\psi_j^2(x_1, \dots, x_n))} \quad (2.30)$$

L'ensemble Γ_{i+} correspond aux polynômes ψ_i dépendant de x_i et éventuellement des autres paramètres.

La méthode d'analyse de sensibilité basée sur la décomposition de la sortie du modèle en polynômes du chaos est limitée à une utilisation sous l'hypothèse d'indépendance des paramètres ainsi que de la distribution connue (normale, uniforme,...) de ses paramètres. En réalité, les modèles décrivant le comportement des systèmes peuvent être en fonction de paramètres dépendants qui sont distribués de façon arbitraire. Dans la section suivante, nous proposons une extension de la méthode de la décomposition en polynômes du chaos dans le cas de paramètres d'entrée dépendants et suivant une distribution arbitraire.

2.4 Analyse de sensibilité des modèles à paramètres dépendants et distribution arbitraire

Comme mentionné dans les paragraphes précédents, l'approche de la décomposition en polynômes du chaos n'est applicable que sous certaines hypothèses : l'indépendance des paramètres et la distribution connue de ses paramètres. A travers un exemple simple, nous montrons ici les limites de cette approche.

Considérons le modèle simple suivant :

$$y = x_1 + x_2 \quad (2.31)$$

où x_1 et x_2 sont deux paramètres incertains variant sur le même intervalle $[a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Les paramètres x_1 et x_2 sont corrélés et la matrice de corrélation de ces paramètres est :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Selon la valeur de ρ et la distribution des paramètres quatre cas sont considérés :

- les paramètres sont indépendants ($\rho = 0$) et suivent une distribution connue (uniforme) ;
- les paramètres sont dépendants ($\rho = 0.9$) et suivent une distribution connue (uniforme) ;
- les paramètres sont indépendants ($\rho = 0$) et suivent une distribution arbitraire (DA) ;
- les paramètres sont dépendants ($\rho = 0.9$) et suivent une distribution arbitraire (DA).

La distribution arbitraire considérée est la combinaison de différentes distributions. Les indices de sensibilité déterminés par l'approche des polynômes du chaos pour les différents cas, sont donnés dans le tableau suivant :

	$\rho = 0$	$\rho = 0,9$	$\rho = 0$ et (DA)	$\rho = 0,9$ et (DA)
S_1	0,5	0,38	0,62	0,35
S_2	0,49	0,61	0,37	0,64
S_{12}	0,00	0,00	0,00	0,00

TABLE 2.2 – Comparaison des indices de sensibilité pour différentes distributions et valeurs de ρ .

Dans le cas de paramètres indépendants ($\rho = 0$) et qui suivent une distribution connue, les indices de sensibilité de x_1 et x_2 sont presque identiques et égaux respectivement à 0,5 et 0,49. L'indice d'interaction est nul. Ce résultat peut être expliqué par le fait que la variance de y est égale à la somme de la variance de x_1 et de la variance de x_2 . Dans le cas d'introduction d'une corrélation $\rho = 0,9$, (2^{ème} et 4^{ème} cas), les indices de sensibilité de x_1 et x_2 sont respectivement égaux à 0,38 et 0,61 pour le 2^{ème} cas et 0,35 et 0,64 pour le 4^{ème}. Dans le 3^{ème} et 4^{ème} cas, les polynômes ne sont pas orthogonaux car la distribution des paramètres est arbitraire. Dans ces deux derniers cas, des valeurs d'indices de sensibilité peuvent être calculées mais n'ont pas de sens car ces indices ne sont plus uniques et les résultats obtenus sont difficiles à interpréter. Cet exemple nous montre que l'introduction d'une corrélation entre les paramètres ainsi que le mauvais choix des polynômes orthogonaux impacte considérablement l'interprétation des indices de sensibilité et peuvent entraîner une analyse erronée des résultats. D'où la nécessité d'opter pour d'autres méthodes qui tiennent compte de la corrélation entre les paramètres et qui ne supposent pas des hypothèses sur leur distributions.

Dans la suite, nous proposons une méthode d'analyse de sensibilité globale pour les modèles à paramètres dépendants et suivant une distribution arbitraire.

2.4.1 Méthodologie

Considérons le modèle donné par (2.1), où les paramètres x_i , $i=1,\dots,n$, sont supposés être aléatoires réels et dépendants. La méthodologie adoptée est une extension des travaux de [45, 60] au cas des paramètres dépendants et qui suivent une distribution arbitraire. La procédure se résume en trois étapes :

- Etape 1 : décorrélation des variables d'entrée.
- Etape 2 : construction d'une base orthonormale en fonction des moments statistiques non centrés des paramètres.
- Etape 3 : calcul des indices de sensibilité explicitement à partir des coefficients du polynôme

du chaos.

Dans la suite nous détaillons chaque étape de la procédure.

2.4.2 Procédé de décomposition des paramètres d'entrée

Dans [45], Mara a proposé de passer par une transformation des paramètres d'entrée avant de déterminer les indices de sensibilité à partir de la décomposition de la variance. Il transforme les paramètres en paramètres indépendants en se servant de la technique d'orthogonalisation de Gram-Schmidt [61]. Dans la suite, nous présentons brièvement le principe de cette technique ainsi qu'une autre méthode de décorrélation à laquelle nous nous sommes intéressés, celle de la décomposition de Cholesky.

2.4.2.1 Orthogonalisation de Gram-Schmidt

La procédure de Gram-Schmidt [61] consiste à construire un vecteur orthogonal à tous les précédents, de façon récursive, par projection orthogonale sur l'espace engendré par ces vecteurs. Cette procédure est utilisée en analyse de sensibilité pour la décorrélation des paramètres d'entrée [45]. Sous l'hypothèse que les moments conditionnels d'ordre 1 caractérisent la dépendance entre les variables, un ensemble de paramètres indépendants (u_1, \dots, u_n) peut être déterminé à partir des paramètres dépendants (x_1, \dots, x_n) :

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 \\ u_i &= x_i - \sum_{j < i} E(x_i/u_j) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ainsi, après l'obtention des paramètres indépendants, la décomposition de Sobol peut être appliquée.

2.4.2.2 Décomposition de Cholesky

On considère une matrice A réelle, symétrique et définie positive. Il existe alors une unique matrice triangulaire inférieure L telle que :

$$A = LL^T \quad (2.33)$$

Les paramètres indépendants sont alors obtenus par l'opération suivante :

$$U = L^{-1}X \quad (2.34)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

où $U = (u_1, \dots, u_n)^T$ est le vecteur de paramètres indépendants, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ est le vecteur de paramètres dépendants et L^{-1} est une matrice triangulaire inférieure.

Remarque 2.4.1 Dans notre cas, A est la matrice de corrélation. Cette décomposition permet de déterminer des relations entre la partie corrélée et la partie indépendante des variables d'entrée, ainsi :

- u_1 ne dépend que de x_1 .
- u_2 est une combinaison de x_1 et x_2 mais elle est indépendante de u_1 donc u_2 représente x_2 sans sa corrélation avec x_1 .
- u_{n-1} représente x_{n-1} sans sa corrélation avec (x_1, \dots, x_{n-2}) .
- ...
- u_n représente x_n sans sa corrélation avec (x_1, \dots, x_{n-1}) . Par conséquent, u_n représente la partie résiduelle appropriée de x_n indépendamment des autres paramètres.

L'ensemble des paramètres indépendants U obtenus ne suivent pas forcément une distribution connue. Pour résoudre le problème de la distribution arbitraire, nous nous servons de la technique proposée par [60] qui consiste à construire une base orthonormale en terme de données caractérisant les paramètres d'entrée.

2.4.3 Construction d'une base orthonormale

La méthode adoptée consiste à construire une base orthonormale à partir des moments statistiques non centrés des variables d'entrée u_j . On définit l'ensemble des polynômes (P_j^0, \dots, P_j^p) de degré p , avec :

$$P_j^k(u_j) = \sum_{i=0}^k p_{i,j}^k u_j^i \text{ avec } k = 0, \dots, p \text{ et } j = 1, \dots, n \quad (2.36)$$

où P_j^i représente le polynôme de degré i dépendant du paramètre u .

Les polynômes P^k sont orthogonaux :

$$\int_{u \in \Omega} p^{(k)}(u) p^{(l)}(u) du = 0, \quad \forall k \neq l \quad (2.37)$$

où Ω est l'intervalle de variation du paramètre u .

Supposons que le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1 :

$$p_{k,j}^{(k)} = 1, \quad \forall k \quad (2.38)$$

Pour $k = 0$, $p_{0,j}^{(0)} = 1$. En outre, en appliquant la condition d'orthogonalité (2.37) pour $P^{(1)}$, on obtient :

$$\int_{u \in \Omega} p_{0,j}^{(0)} \left[\sum_{i=0}^1 p_{1,j}^{(1)} u^i \right] du = 0 \quad (2.39)$$

On peut ainsi construire, grâce à cette procédure, une base orthogonale. La condition d'orthogonalité est appliquée pour tout polynôme $P^{(k)}$ de degré k avec un polynôme de degré inférieur :

$$\begin{aligned}
 \int_{u \in \Omega} p_{0,j}^{(0)} \left[\sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} u^i \right] du &= 0 \\
 \int_{u \in \Omega} \left[\sum_{i=0}^1 p_{i,j}^{(1)} u^i \right] \left[\sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} u^i \right] du &= 0 \\
 &\vdots \\
 \int_{u \in \Omega} \left[\sum_{i=0}^{k-1} p_{i,j}^{(k-1)} u^i \right] \left[\sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} u^i \right] du &= 0 \\
 p_{k,j}^{(k)} &= 1
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

En utilisant l'équation (2.39) et en substituant la première équation de l'équation (2.40) dans la deuxième et la deuxième dans la troisième et ainsi de suite, l'équation (2.40) peut être réduite à :

$$\begin{aligned}
 \int_{u \in \Omega} \sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} u^i du &= 0 \\
 \int_{u \in \Omega} \sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} u^{i+1} du &= 0 \\
 &\vdots \\
 \int_{u \in \Omega} \sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} u^{i+k-1} du &= 0 \\
 p_k^{(k)} &= 1
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Considérons le moment statistique non centré μ_k du paramètre u :

$$\mu_k = \int_{u \in \Omega} u^k du = 0 \tag{2.42}$$

Ou sous la forme suivante :

$$\mu_{i,j} = E[u_j^i] \tag{2.43}$$

L'équation (2.41) peut être écrite en fonction des moments non centrés comme suit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} \mu_i &= 0 \\
 \sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} \mu_{i+1} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \sum_{i=0}^k p_{i,j}^{(k)} \mu_{i+k-1} &= 0 \\
 p_{k,j}^{(k)} &= 1
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Les coefficients $P_{i,j}^k$ des polynômes $P_j^k(u_j)$, peuvent alors être déterminés en résolvant l'équation matricielle suivante [62, 63] :

$$\begin{bmatrix} \mu_{0,j} & \mu_{1,j} & \cdots & \mu_{k,j} \\ \mu_{1,j} & \mu_{2,j} & \cdots & \mu_{k+1,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{k-1,j} & \mu_{k,j} & \cdots & \mu_{2k-1,j} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{0,j}^k \\ p_{1,j}^k \\ \cdots \\ p_{k-1,j}^k \\ p_{k,j}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Et la base orthogonale obtenue peut être normalisée comme suit :

$$\hat{P}_j^k(u_j) = \frac{P_j^k}{\|P_j^k\|} \quad (2.46)$$

Une fois que la base orthogonale est déterminée, les indices de sensibilité peuvent être déterminés à partir des coefficients des polynômes du chaos.

Remarque 2.4.2 Les polynômes ψ_j , dans l'équation (2.14), sont écrits en fonction des polynômes $P_j^{\alpha_j^k}(u_j)$:

$$\psi_j(u_1, \dots, u_n) = \prod_{k=1}^n P_j^{\alpha_j^k}(u_k) \quad ; \quad k = 1, \dots, n \quad (2.47)$$

2.4.3.1 Exemple

Reprenons l'exemple précédent. Pour un degré de polynôme souhaité $p = 2$ et une distribution arbitraire, on associe les polynômes orthogonaux suivants :

$$\begin{aligned} P_j^0(u_j) &= p_{0,j}^0 \\ P_j^1(u_j) &= p_{0,j}^1 + p_{1,j}^1 u_j \\ P_j^2(u_j) &= p_{0,j}^2 + p_{1,j}^2 u_j + p_{2,j}^2 u_j^2 \end{aligned}$$

Selon la méthodologie définie précédemment, les coefficients des polynômes sont déterminés en résolvant les équations suivantes :

$$p_{0,j}^0 = 1 \quad ; \quad \begin{bmatrix} p_{0,j}^1 \\ p_{1,j}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{0,j} & \mu_{1,j} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} p_{0,j}^2 \\ p_{1,j}^2 \\ p_{2,j}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{0,j} & \mu_{1,j} & \mu_{2,j} \\ \mu_{1,j} & \mu_{2,j} & \mu_{3,j} \\ \mu_{2,j} & \mu_{3,j} & \mu_{4,j} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La sortie du modèle est alors approchée par :

$$y \approx a_0 + a_1 P_1^1(u_1) + a_2 P_2^1(u_2) + a_3 P_1^2(u_1) + a_4 P_2^2(u_2) + a_5 P_1^1(u_1) P_2^1(u_2)$$

2.4.4 Indices de sensibilité estimés par les polynômes du chaos

Après avoir déterminé la base orthogonale, les coefficients des polynômes du chaos peuvent être déterminés à partir de l'équation (2.22) ainsi que les indices de sensibilité. Afin d'obtenir tous les indices reflétant l'effet des entrées sur la variation de la sortie, n ensembles de variables indépendantes doivent être générés. Considérons, l'ensemble $U = (u_1, \dots, u_n)$ de variables indépendantes données par (2.33) et (2.34).

Les indices de sensibilité sont interprétés comme suit [45] :

- u_1 représente x_1 donc S_1 représente l'effet principal de x_1 sur la sortie : il contient sa contribution seule et la contribution due à sa corrélation avec les autres variables.
- u_2 représente x_2 sans sa corrélation avec x_1 : S_2 donne l'effet de x_2 sans sa corrélation avec x_1 . Dans la suite, cet indice est noté S_{2-1} .
- ...
- u_{n-1} représente x_{n-1} sans sa corrélation avec (x_1, \dots, x_{n-2}) . Donc $S_{(n-1)-(1, \dots, n-2)}$ représente x_{n-1} sans sa contribution due à sa corrélation avec (x_1, \dots, x_{n-2}) .
- u_n représente la partie indépendante de x_n , S_n est alors la contribution de x_n seule notée Su_{x_i} .

L'effet principal de la variable d'entrée x_i et celui dû à sa corrélation avec les autres variables, sont déterminés en permutant l'ordre des variables dans l'ensemble, en considérant l'ensemble $U = (u_i, \dots, u_{i-1})$. Par exemple, pour obtenir l'effet principal x_2 , l'ensemble $U = (u_2, \dots, u_n, u_1)$ est généré et la même méthodologie est adoptée.

La méthodologie présentée peut être résumée par l'organigramme représenté sur la figure (2.2).

2.4.4.1 Exemple

En reprenant l'exemple précédent, les indices de sensibilité sont calculés suivant l'algorithme développé (voir figure (2.2)) :

S_{x_1}	Su_{x_2}
0.94	0.05
S_{x_2}	Su_{x_1}
0.94	0.05

TABLE 2.3 – Indices de sensibilité obtenus avec l'expression $y = x_1 + x_2$, x_1 et $x_2 \in [0;1]$ sont corrélés et de distribution arbitraire

Les indices peuvent être interprétés comme suit :

- $S_{x_1} = 0.94$ correspond à l'influence individuelle de x_1 due à sa partie corrélée avec x_2 et à sa partie non corrélée.

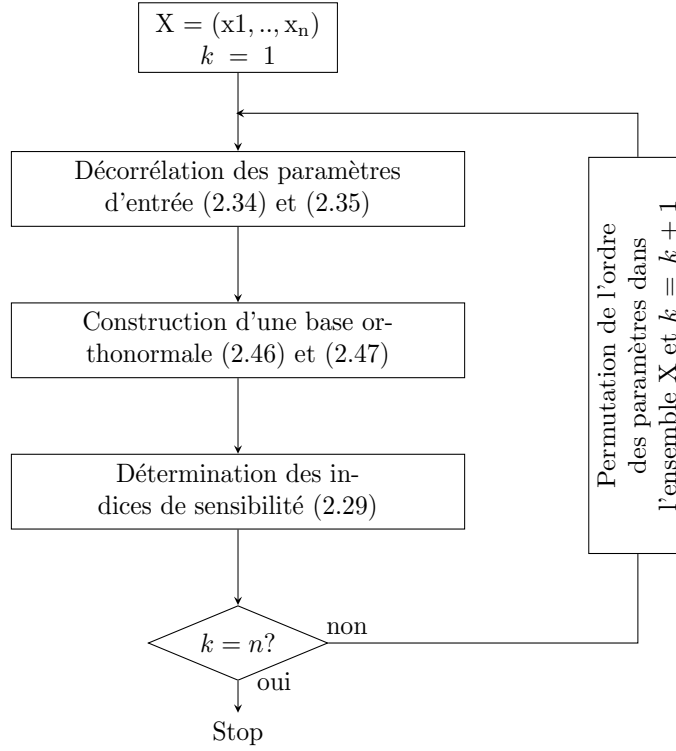


FIGURE 2.2 – Principe de la méthodologie proposée.

- $S_{x_2} = 0.94$ correspond à l'influence individuelle de x_2 due à sa partie corrélée avec x_1 et à sa partie non corrélée.
- $Su_{x_1} = 0.05$ correspond à l'influence individuelle de x_1 due à sa partie non corrélée.
- $Su_{x_2} = 0.05$ correspond à l'influence individuelle de x_2 due à sa partie non corrélée.

Ces indices montrent que les paramètres x_1 et x_2 contribuent ensemble sur la variation de la sortie. L'influence des paramètres due à leur partie non corrélée est presque négligeable. Ces résultats sont expliqués par la forte corrélation entre les deux paramètres (corrélation fixée de 0.9).

Afin de montrer l'efficacité de la méthode décrite dans la section précédente, nous étudions dans la suite l'influence des paramètres d'un modèle décrivant le comportement du pneu au sol, sur la force latérale.

2.5 Application

L'objectif de cette section est d'étudier l'influence des paramètres du modèle de Pacejka décrit dans le chapitre précédent. Une vue d'ensemble des entrées et des sorties du modèle étudié est décrite ci-dessous (figure (2.3)). Les variables d'entrée sont définies comme suit :

- F_z est la charge verticale

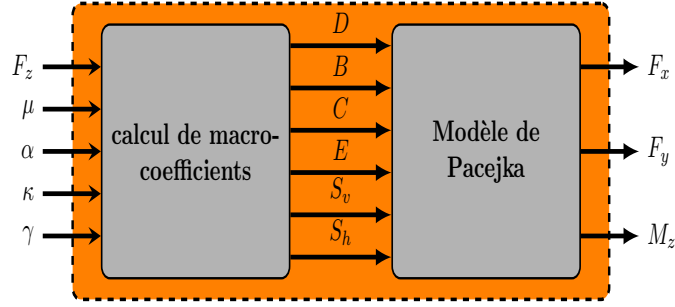


FIGURE 2.3 – Vue d’ensemble des entrées et des sorties du modèle de Pacejka.

- μ est le coefficient d’adhérence
- α est l’angle de dérive
- κ est le taux de glissement
- γ est l’angle de carrossage
- D est la valeur à laquelle la force atteint son maximum
- B est le facteur de raideur
- C est le facteur de forme
- E est le facteur de courbure
- S_v est le décalage vertical
- S_h est le décalage horizontal

Les coefficients D , B , C , E , S_v et S_h dits macro-coefficients dépendent de la charge verticale F_z , de sa variation et de l’angle de carrossage γ . Les sorties du modèle considérées par le modèle (voir figure (2.3)) sont la force longitudinale du pneu F_x , la force latérale pure F_y et le moment d’auto-alignement M_z . Pour les besoins de notre étude, on s’intéresse uniquement à la force latérale pure F_y . Ce cas correspond à une manœuvre de virage. Il est à noter que la même méthodologie peut être appliquée pour l’étude de l’influence des paramètres sur les autres sorties.

L’expression de la force latérale pure F_y du modèle de Pacejka est alors donnée comme suit [64] :

$$F_y = \mu F_z \sin(C \arctan(B(\alpha + S_h) - E(B(\alpha + S_h) - \arctan(B(\alpha + S_h)))) + S_v) \quad (2.48)$$

La rigidité latérale du pneumatique K_y est définie par :

$$K_y = BC\mu F_z \quad (2.49)$$

En outre, l’expression de la rigidité latérale K en fonction de la charge verticale F_z et de l’angle de carrossage γ , est définie comme suit :

$$K_y = p_1 F_z \sin(2 \arctan(\frac{F_z}{p_2 F_{z0}}))(1 - p_3 |\gamma|) \quad (2.50)$$

Les paramètres p_1 , p_2 et p_3 sont des paramètres empiriques appelés micro-coefficients, déterminés expérimentalement pour chaque type de pneu. F_{z_0} est la charge verticale nominale.

Dans cette étude, deux cas sont considérés. Le premier est l'étude de l'influence des micro-coefficients p_1 , p_2 et p_3 qui sont indépendants, sur la rigidité latérale K_y . Le deuxième cas est l'étude de l'influence des entrées dépendantes α , μ , γ , F_z et K_y sur la force latérale F_y .

2.5.1 Cas d'un modèle à paramètres indépendants et distribution arbitraire

Dans ce cas, les intervalles de variations des paramètres p_1 , p_2 et p_3 sont respectivement $[-23; -19]$, $[1,6; 2]$ et $[1,3; 1,5]$. Pour avoir une distribution quelconque nous avons adopté comme dans [60], une combinaison d'une distribution normale, log-normale et beta. La figure (2.4) représente les fonctions de densité de probabilité des paramètres d'entrée p_1 , p_2 et p_3 .

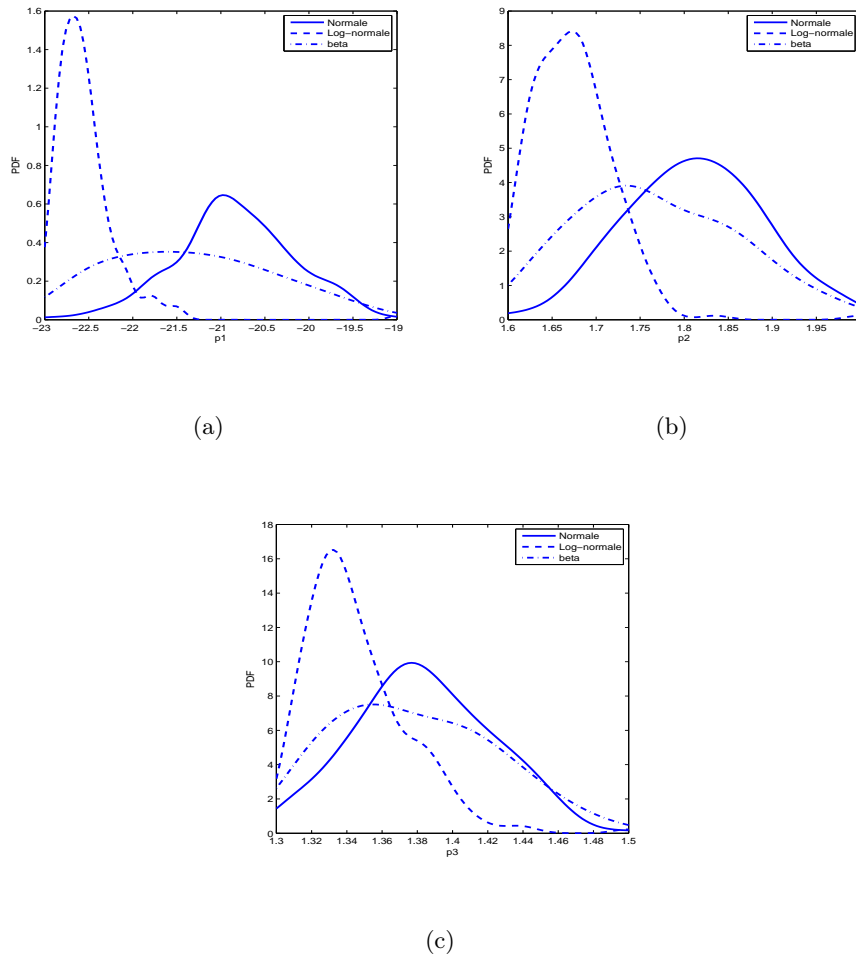


FIGURE 2.4 – Densités de probabilité des paramètres (a) p_1 , (b) p_2 et (c) p_3

La figure (2.5) illustre la variation de la rigidité latérale en fonction de F_z et des micro-coefficients.

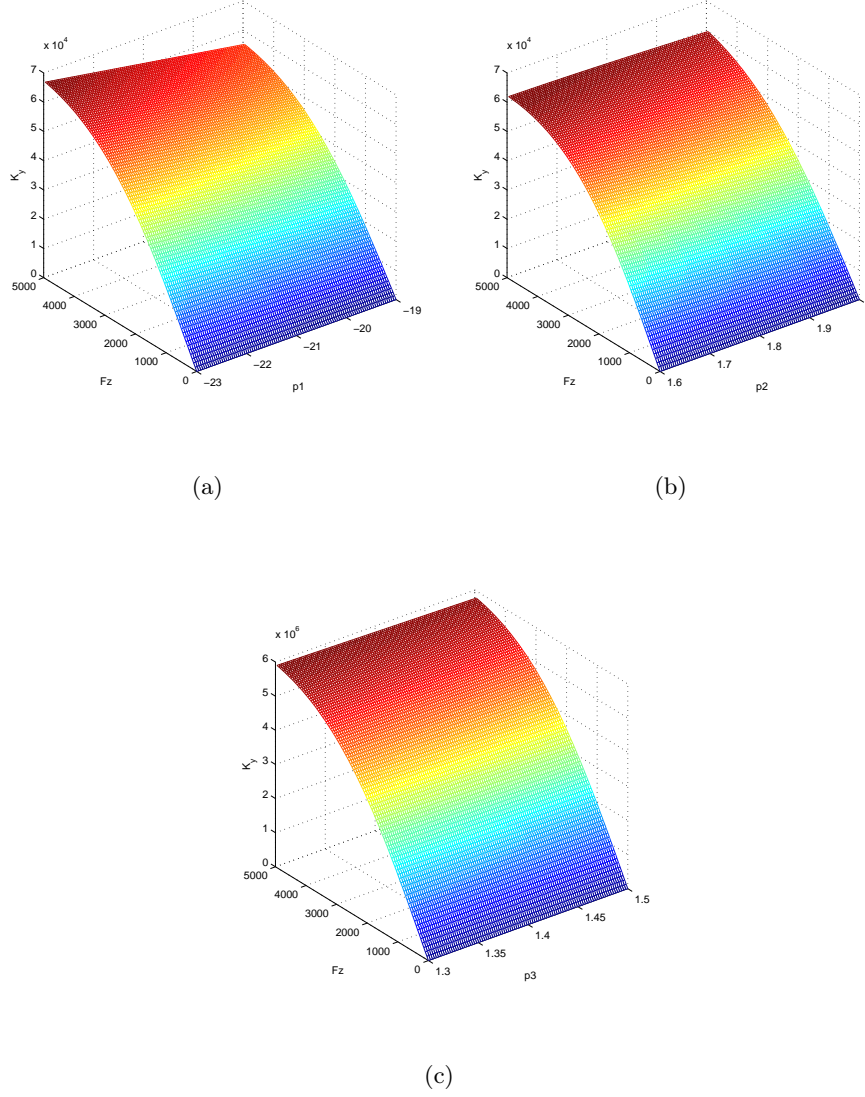


FIGURE 2.5 – Rigidité latérale en fonction de F_z et des micro-coefficients (a) p_1 , (b) p_2 et (c) p_3

Nous remarquons que la rigidité latérale augmente lorsque la charge verticale F_z augmente. Donc, selon la valeur de la charge verticale F_z , nous avons considéré trois situations :

- $F_z \approx F_{z0}$: Situation d'une conduite normale.
- $F_z \gg F_{z0}$: Situation de freinage pour les pneus de l'essieu avant ou accélération pour les pneus de l'essieu arrière.
- $F_z \ll F_{z0}$: Situation d'accélération pour les pneus de l'essieu avant ou freinage pour les pneus de l'essieu arrière.

avec F_{z_0} qui est la charge verticale nominale.

L'évolution de la rigidité latérale du pneu K_y obtenue en générant d'une façon aléatoire les paramètres ainsi que son estimation par l'approche des polynômes du chaos pour $p = 3$ sont données, sur la figure (2.6). La figure (2.6) illustre aussi l'erreur d'estimation, notée J , pour différentes valeurs du degré des polynômes. L'erreur d'estimation J est calculée selon la définition suivante :

$$J = 100 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y(i) - \hat{y}(i))^2}{\sum_{i=1}^N \hat{y}(i)^2}}$$

avec $y(i)$ la sortie de modèle, $\hat{y}(i)$ la sortie estimée par les polynômes du chaos et N le nombre d'échantillons.

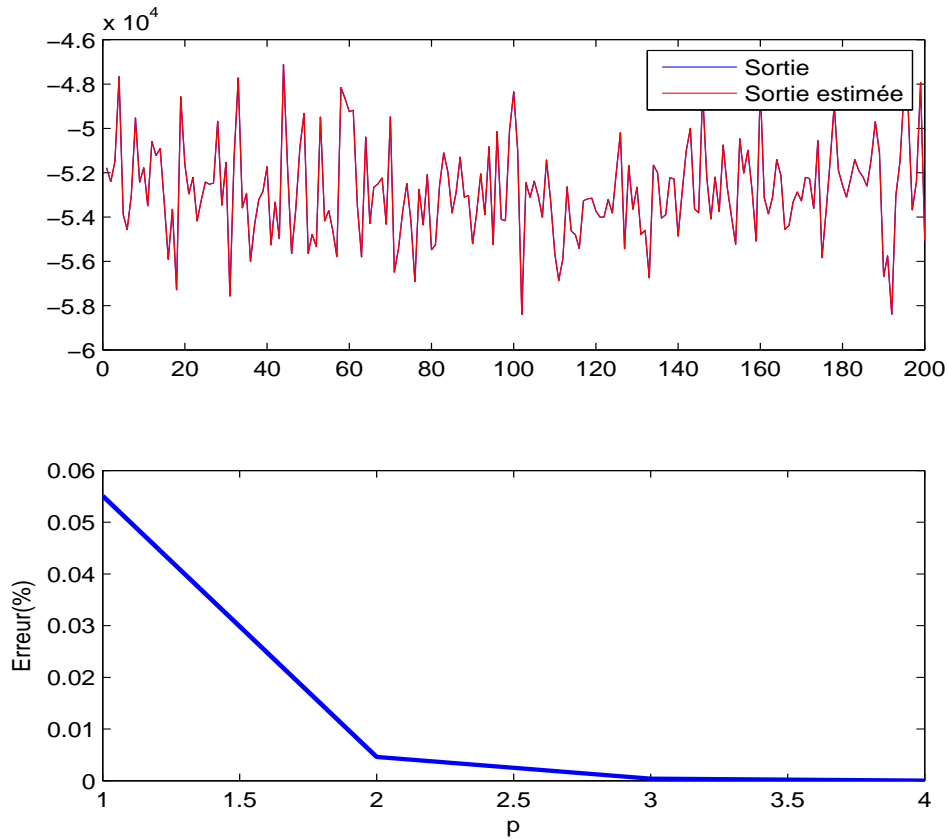


FIGURE 2.6 – Figure du haut : sortie du modèle et sortie estimée - Figure du bas : erreur d'estimation en fonction du degré du polynôme du chaos choisi.

D'après la figure (2.6), nous remarquons qu'un degré $p = 3$ est suffisant pour avoir une bonne

approximation de la sortie du modèle, ici la rigidité latérale.

Les indices de sensibilité S_1 , S_2 et S_3 correspondant respectivement à p_1 , p_2 et p_3 , obtenus en appliquant l'approche des polynômes du chaos, sont donnés dans le tableau (2.4) et illustrés par la figure (2.7).

	$F_z \approx F_{z0}$	$F_z >> F_{z0}$	$F_z << F_{z0}$
S_1	0,63	0,86	0,57
S_2	0,35	0,12	0,42
S_3	0,00	0,01	0,00

TABLE 2.4 – Indices de sensibilité

Pour les différentes situations de conduite, nous constatons que le paramètre p_1 a l'indice de sensibilité le plus élevé. Cela s'explique par la relation linéaire entre la rigidité latérale K_y et p_1 . Ensuite vient le paramètre p_2 . Le paramètre le moins influent sur la sortie est p_3 parce qu'il est lié au carrossage γ qui possède une faible valeur.

2.5.2 Cas d'un modèle à paramètres dépendants et distribution arbitraire

2.5.2.1 Caractéristiques des entrées et des sorties

Les paramètres considérés dans cette étude sont : α , μ , γ , F_z et K_y . Ce dernier est calculé en fonction de μ et F_z . Relativement au véhicule d'essai dont nous disposons, nous considérons les intervalles de variation suivants $\alpha \in [0 \text{ rad}; 0,6981 \text{ rad}]$, $\mu \in [0,3; 1]$, $\gamma \in [0 \text{ rad}; 0,0873 \text{ rad}]$, $F_z \in [0 \text{ N}; 3\,300 \text{ N}]$ et $K_y \in [0 \frac{\text{N}}{\text{rad}}; 59\,366 \frac{\text{N}}{\text{rad}}]$. Une combinaison d'une distribution normale, log-normale et beta est adoptée pour construire une distribution arbitraire.

La sortie considérée est la force latérale F_y qui est obtenue suivant la formule non-linéaire (2.48).

On considère un échantillon de mesures de taille $N = 20\,000$ pour chaque paramètre.

La matrice de corrélation associée aux paramètres $(\alpha, F_z, \gamma, \mu, K_y)$ est la suivante :

	α	F_z	γ	μ	K_y
α	1	0,00	0,00	0,00	0,00
F_z	0,00	1	0,00	0,00	-0,98
γ	0,00	0,00	1	0,00	0,07
μ	0,00	0,00	0,00	1	0,00
K_y	0,00	-0,98	0,07	0,00	1

TABLE 2.5 – Matrice de corrélation des paramètres

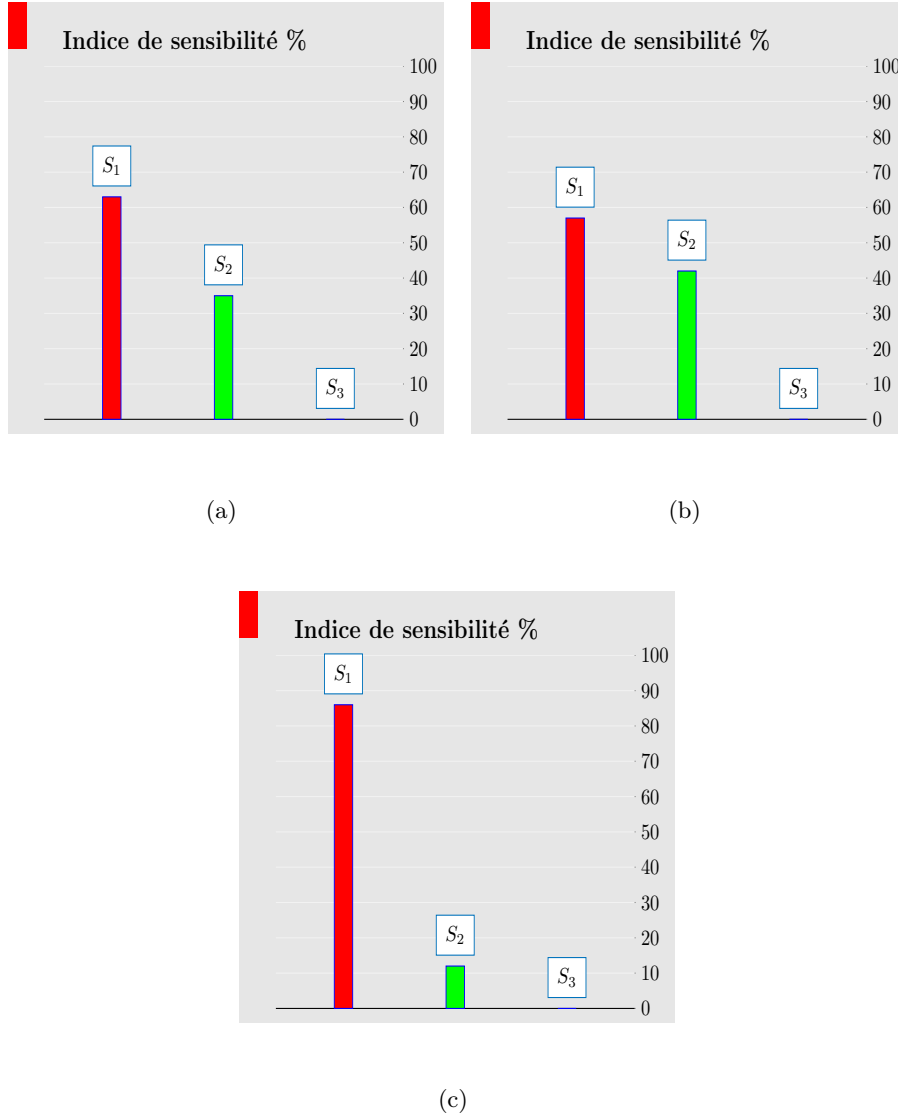


FIGURE 2.7 – Indices de sensibilité pour : (a) $F_z \approx F_{z_0}$, (b) $F_z << F_{z_0}$ (c) $F_z >> F_{z_0}$

2.5.2.2 Résultats et discussion

Le nombre de paramètres est $n = 5$ et le degré souhaité du polynôme du chaos est $p = 3$. Par conséquent, le nombre de coefficients de PC à estimer est $M + 1 = 56$. Les moments statistiques non centrés de $(\alpha, F_z, \gamma, \mu, K_y)$ sont donnés par (2.43) jusqu'à l'ordre 5 (p est le degré de PC souhaité). Dans le but de mieux comprendre le sens physique des indices de sensibilité obtenus, la force latérale pure est représentée en fonction de l'angle de dérive α , pour différentes valeurs de la charge verticale F_z sur la figure (2.8).

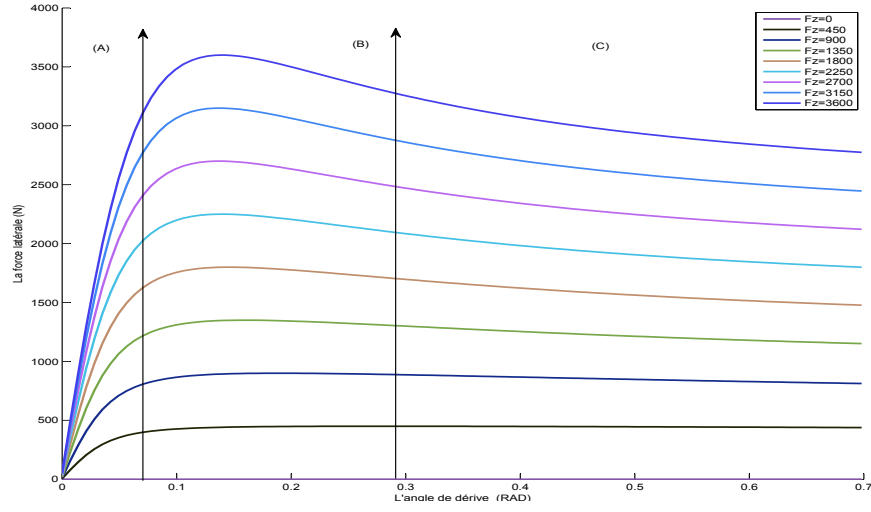


FIGURE 2.8 – Force latérale pure F_y en fonction de l'angle de dérive α , pour différentes valeurs de la charge verticale F_z .

Pour étudier l'effet des paramètres $(\alpha, F_z, \gamma, \mu, K_y)$ sur la variation de la sortie du modèle F_y , on définit trois intervalles comme indiqué sur la figure (2.8). Ces trois intervalles, en fonction des valeurs de l'angle de dérive, sont pris en compte (zone linéaire, zone non linéaire et zone de saturation). Les différents indices calculés présentent la contribution du paramètre seul ou bien la contribution due à sa corrélation avec les autres paramètres, pour chaque intervalle considéré. Ils sont donnés dans les tableaux 2.6, 2.7 et 2.8.

S_α	$S_{Fz-\alpha}$	$S_{\gamma-Fz\alpha}$	$S_{\mu-\gamma Fz\alpha}$	$S_{u_{K_y}}$
0,04	0,62	0,00	0,01	0,25
S_{Fz}	$S_{\gamma-Fz}$	$S_{\mu-\gamma Fz}$	$S_{K_y-\mu\gamma Fz}$	S_{u_α}
0,62	0,00	0,07	0,00	0,25
S_γ	$S_{\mu-\gamma}$	$S_{K_y-\mu\gamma}$	$S_{\alpha-K_y\mu\gamma}$	$S_{u_{Fz}}$
0,00	0,07	0,61	0,25	0,02
S_μ	$S_{K_y-\mu}$	$S_{\alpha-K_y\mu}$	$S_{Fz-\alpha K_y\mu}$	S_{u_γ}
0,07	0,62	0,24	0,00	0,00
S_{K_y}	$S_{\alpha-K_y}$	$S_{Fz-\alpha K_y}$	$S_{\gamma-Fz\alpha K_y}$	S_{u_μ}
0,61	0,24	0,004	0,00	0,07

TABLE 2.6 – Indices de sensibilité obtenus, $\alpha \in [0; 0,07\text{rad}]$

S_α	$S_{Fz-\alpha}$	$S_{\gamma-Fz\alpha}$	$S_{\mu-\gamma Fz\alpha}$	Su_{K_y}
0,00	0,71	0,00	0,25	0,00
S_{Fz}	$S_{\gamma-Fz}$	$S_{\mu-\gamma Fz}$	$S_{K_y-\mu\gamma Fz}$	Su_α
0,71	0,00	0,25	0,00	0,00
S_γ	$S_{\mu-\gamma}$	$S_{K_y-\mu\gamma}$	$S_{\alpha-K_y\mu\gamma}$	Su_{Fz}
0,00	0,26	0,69	0,00	0,01
S_μ	$S_{K_y-\mu}$	$S_{\alpha-K_y\mu}$	$S_{Fz-\alpha K_y\mu}$	Su_γ
0,25	0,70	0,00	0,01	0,00
S_{K_y}	$S_{\alpha-K_y}$	$S_{Fz-\alpha K_y}$	$S_{\gamma-Fz\alpha K_y}$	Su_μ
0,70	0,00	0,01	0,00	0,25

TABLE 2.7 – Indices de sensibilité obtenus, $\alpha \in [0,07rad;0,29rad]$

S_α	$S_{Fz-\alpha}$	$S_{\gamma-Fz\alpha}$	$S_{\mu-\gamma Fz\alpha}$	Su_{K_y}
0,00	0,67	0,00	0,28	0,00
S_{Fz}	$S_{\gamma-Fz}$	$S_{\mu-\gamma Fz}$	$S_{K_y-\mu\gamma Fz}$	Su_α
0,67	0,00	0,28	0,00	0,00
S_γ	$S_{\mu-\gamma}$	$S_{K_y-\mu\gamma}$	$S_{\alpha-K_y\mu\gamma}$	Su_{Fz}
0,00	0,27	0,65	0,00	0,04
S_μ	$S_{K_y-\mu}$	$S_{\alpha-K_y\mu}$	$S_{Fz-\alpha K_y\mu}$	Su_γ
0,28	0,677	0,00	0,00	0,00
S_{K_y}	$S_{\alpha-K_y}$	$S_{Fz-\alpha K_y}$	$S_{\gamma-Fz\alpha K_y}$	Su_μ
0,68	0,00	0,00	0,00	0,27

TABLE 2.8 – Indices de sensibilité obtenus, $\alpha \in [0,29rad;0,7rad]$

Pour des petites valeurs de l'angle de dérive ($\alpha < 0,07 \text{ rad}$), la relation entre la force latérale pure F_y et l'angle de dérive est presque linéaire : cette zone (A) représente la zone d'adhérence. Dans cette zone, la force latérale pure peut être exprimée comme suit :

$$F_y = K_y \alpha$$

Le modèle linéaire est alors calculé uniquement en fonction de la rigidité latérale K_y et l'angle de dérive α . Le tableau 2.6 indique une valeur élevée de l'indice de sensibilité correspondant à la charge verticale ($S_{Fz} = 0,62$), suivie par l'angle de dérive ($Su_\alpha = 0,25$) et par la suite le coefficient d'adhérence ($S_\mu = 0,07$) ; ce qui semble cohérent vis à vis de la figure (2.8) qui montre que l'augmentation de la charge verticale induit une augmentation de la force latérale pure F_y . En fait, la valeur maximale F_{ymax} que la force latérale pure peut atteindre, dépend de la charge verticale F_z et du coefficient d'adhérence μ . Il est clair que dans cette zone, lorsque

l'angle de dérive augmente, la force latérale pure augmente, puisque F_z et α sont indépendants et la contribution de F_z est due à sa partie corrélée avec le facteur de rigidité K_y ($S_{F_z} = 0,62$, $S_{u_{F_z}} = 0,02$ et $S_{F_z-\alpha K_y} = 0,004$). La deuxième zone (B) correspond à la partie non linéaire. Dans cette zone, le coefficient d'adhérence latérale μ et la charge verticale F_z , déterminent la force maximale que le pneu peut atteindre. Par conséquent, l'indice de sensibilité de la charge verticale F_z reste élevé ($S_{F_z} = 0,71$). Celui correspondant à l'adhérence a augmenté ($S_\mu = 0,25$). Plus on augmente l'angle de dérive moins la force latérale croît ce qui explique la valeur quasi inexistante de l'indice de sensibilité de l'angle de dérive ($S_\alpha = 0,00$). La troisième zone (C) est la zone de saturation. L'indice de sensibilité de la charge verticale ($S_{F_z} = 0,67$) a légèrement diminué mais reste important et la contribution de l'angle de dérive α est quasi négligeable ($S_\alpha = 0,00$, $S_{u_\alpha} = 0,00$).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une extension de l'approche des polynômes du chaos pour des modèles à paramètres dépendants et suivent une distribution arbitraire. L'approche consiste à décorréliser les paramètres d'entrée, puis à déterminer les indices de sensibilité à partir des coefficients obtenus. Ces derniers sont déterminés par la construction d'une base orthonormale en termes statistiques non centrés des paramètres. Dans la dernière partie de ce chapitre, la méthode proposée est appliquée pour étudier la sensibilité de la sortie d'un modèle décrivant le comportement latéral du pneu au sol suite à la variation de ses paramètres. L'approche proposée est statistique et statique. Les indices de sensibilité sont déterminés pour des situations particulières. En outre, le véhicule est un système dynamique dont le comportement dépend de plusieurs paramètres. Dans ce cas, une étude dynamique de l'influence des paramètres peut être envisagée pour appréhender le comportement de systèmes dans différentes situations, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

3

Analyse de sensibilité des modèles dynamiques

Sommaire

3.1	Introduction	73
3.2	Problématique	73
3.3	Analyse de sensibilité locale basée sur les dérivées partielles pour les modèles dynamiques	74
3.3.1	Cas des modèles linéaires	74
3.3.2	Analyse de sensibilité basée sur les fonctions de transferts	77
3.3.3	Cas des modèles non linéaires	78
3.3.4	Exemple illustratif	79
3.3.5	Application sur un modèle de véhicule	81
3.3.6	Comparaison entre une analyse de sensibilité locale et globale	88
3.4	Analyse de sensibilité basée sur les Grammiens	90
3.4.1	Grammien et énergie d'entrée et de sortie	90
3.4.2	Commande optimale et énergie minimale	91
3.4.3	Placement optimal des paramètres	95
3.5	Application sur un modèle de véhicule	99
3.5.1	Etude de l'influence des paramètres d'un modèle bicyclette sur la variation de l'énergie consommée en entrée	99
3.5.2	Etude de l'influence des paramètres d'un modèle bicyclette sur la variation de l'énergie fournie en sortie	101
3.6	Conclusion	103

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, l'influence des paramètres est déterminée à partir des polynômes du chaos. L'approche ainsi présentée est basée sur des outils statistiques et appliquée sur des modèles statiques. Pour les modèles dynamiques, très souvent, des techniques locales sont utilisées. Elles sont généralement basées sur le calcul de la dérivée de la sortie par rapport au paramètre dont on cherche à tester l'influence, autour d'un point de fonctionnement. Cependant, selon le domaine d'application et en particulier dans le domaine de l'automobile, les paramètres peuvent varier dans des intervalles de variation relativement grands. Ainsi, l'application d'une analyse de sensibilité locale ne s'avère pas pertinente. Les méthodes globales basées sur la décomposition de la variance, telles que les polynômes du chaos présentés précédemment, ont été étendues au cas de modèles dynamiques [65, 66]. La dynamique du système est considérée comme des séries temporelles et un indice de sensibilité est calculé à chaque instant, indépendamment de l'indice obtenu à l'instant précédent. Si cette approche fournit de nombreux indices de sensibilité, ils restent difficiles à interpréter, et l'approche s'avère coûteuse en temps de calcul. Afin de réduire la dimension du problème, l'analyse en composante principale (ACP) est parfois utilisée [67, 68]. Cette technique consiste à déterminer un indice pour chaque composante de la base. Elle permet de quantifier l'influence de paramètres sur toute la dynamique de la sortie. Le principal inconvénient de cette technique est le choix de la dimension réduite par l'ACP pour conserver l'information.

Ainsi, ce chapitre a pour but de proposer des méthodes d'analyse de sensibilité plus performantes pour les modèles dynamiques. Dans la première partie, nous présentons une méthode d'analyse de sensibilité locale pour des modèles linéaires et non linéaires en se basant sur le calcul de la dérivée de la sortie. Dans la deuxième partie, nous proposons une méthode d'analyse de sensibilité basée sur l'interprétation énergétique fournie par les Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité, présentés dans le chapitre 1.

3.2 Problématique

On considère un système dynamique représenté sur la figure (3.1). La dynamique est régie par une fonction f dépendante du temps t et des paramètres θ .

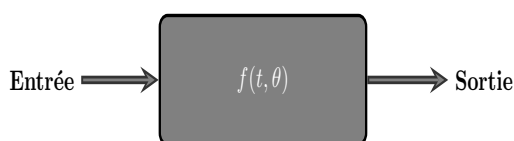


FIGURE 3.1 – Représentation d'un système dynamique dépendant des paramètres.

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta})$ est le vecteur de paramètres considérés incertains.

Le but est d'étudier la sensibilité des paramètres incertains θ_i sur la sortie $y(t)$. Pour cela, le comportement du système est étudié autour d'un point de fonctionnement. La sensibilité, noté $S_i(t)$, de la sortie y par rapport à la variation du paramètre θ_i est donnée par :

$$S_i(t) = \left. \frac{\partial y(t)}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i = \theta_i^0} \quad (3.1)$$

Cette équation donne l'impact de la variation du paramètre θ_i sur la sortie autour de sa valeur nominale θ_i^0 . Or dans un système réaliste en particulier dans le domaine de l'automobile, le paramètre θ_i peut varier sur un intervalle plus large. Par conséquent, l'analyse de sensibilité locale s'avère être insuffisante pour obtenir des résultats précis et facile à interpréter.

Nous rappelons que l'objectif est l'étude de la sensibilité des paramètres en tenant compte de l'aspect dynamique du système et de la variation des paramètres. Dans le paragraphe suivant, nous détaillons l'analyse de sensibilité locale pour une classe de systèmes linéaires et non linéaires.

3.3 Analyse de sensibilité locale basée sur les dérivées partielles pour les modèles dynamiques

Ici, nous nous focalisons sur la détermination d'un système de fonctions de sensibilité qui décrivent l'influence des paramètres en fonction du temps pour une classe de modèles linéaires puis non linéaires.

3.3.1 Cas des modèles linéaires

Considérons une classe de systèmes dynamiques linéaires ayant pour représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta) x(t) + B(\theta) u(t) \\ y(t) = C(\theta) x(t) + D(\theta) u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ est le vecteur de paramètres incertains, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_m}$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_m}$ et $C \in \mathbb{R}^{n_p \times n_x}$ et $D \in \mathbb{R}^{n_p \times n_m}$ sont respectivement la matrice d'état, la matrice de commande, la matrice d'observation et la matrice d'action.

A partir des équations d'un modèle (représentation d'état, équation différentielle, fonction de transfert, etc), l'idée est de construire un modèle de fonctions de sensibilité de la même forme que le modèle décrivant le comportement du système et utilisant les informations disponibles à savoir le vecteur de commande u et la sortie de modèle y comme illustré sur la figure (3.2).

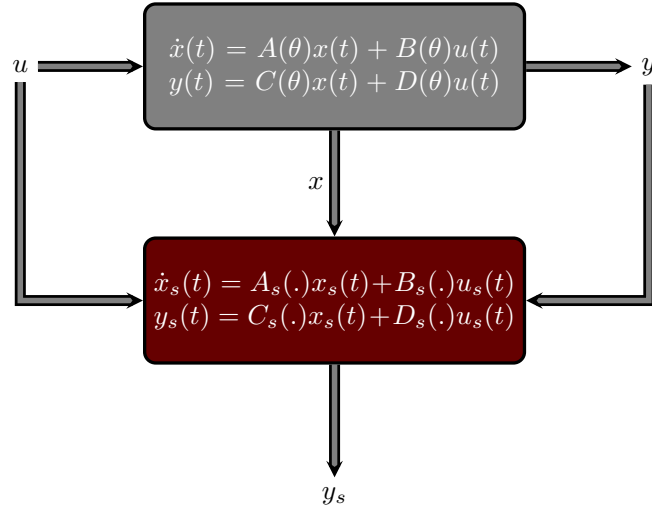


FIGURE 3.2 – Principe de la construction d’un modèle de fonctions de sensibilité pour un système dynamique linéaire

Le paragraphe suivant est dédié à la construction du modèle de fonctions de sensibilité.

3.3.1.1 Construction d’un modèle de fonctions de sensibilité

En dérivant l’équation (3.2) par rapport au paramètre θ_i , il vient :

$$\frac{\partial \dot{x}(t)}{\partial \theta_i} = A(\theta) \frac{\partial x(t)}{\partial \theta_i} + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_i} x(t) + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_i} u(t) + B(\theta) \frac{\partial u(t)}{\partial \theta_i} \quad (3.3)$$

Notons S_y et S_x les matrices qui correspondent aux sensibilités du vecteur de sortie et des états :

$$S_y(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial \theta(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(t)}{\partial \theta_1(t)} & \cdots & \frac{\partial y_1(t)}{\partial \theta_{n_\theta}(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{n_p}(t)}{\partial \theta_1(t)} & \cdots & \frac{\partial y_{n_p}(t)}{\partial \theta_{n_\theta}(t)} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

et

$$S_x(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial \theta(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(t)}{\partial \theta_1(t)} & \cdots & \frac{\partial x_1(t)}{\partial \theta_{n_\theta}(t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n_x}(t)}{\partial \theta_1(t)} & \cdots & \frac{\partial x_{n_x}(t)}{\partial \theta_{n_\theta}(t)} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Considérons les deux hypothèses simplificatrices suivantes :

- les paramètres sont indépendants : $\frac{\partial \theta_j}{\partial \theta_i} = 0$;
- l’étude est effectuée en boucle ouverte, la commande u est alors indépendante des paramètres : $\frac{\partial u(t)}{\partial \theta_i} = 0$.

A partir des équations (3.3), (3.4) et (3.5), nous pouvons définir un système qui permet de décrire la dynamique de l'influence de chaque paramètre θ_i sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{S}_x^i(t) = A(\theta) S_x^i(t) + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_i} x(t) + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_i} u(t) \\ S_y^i(t) = C(\theta) S_x^i(t) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_i} x(t) + \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_i} u(t) \\ S_x(t_0) = S_{x_0} \end{cases} \quad (3.6)$$

En regroupant tous les systèmes qui correspondent à différents paramètres θ_i , on définit les vecteurs de sensibilité d'état $x_s(t)$ et le vecteur de sensibilité de la sortie $y_s(t)$ comme suit :

- $x_s(t) = [S_x^1(t), S_x^2(t), \dots, S_x^{n_\theta}(t)]^T$ vecteur contenant les fonctions de sensibilité des états ;
- $y_s(t) = [S_y^1(t), S_y^2(t), \dots, S_y^{n_\theta}(t)]^T$ vecteur contenant les fonctions de sensibilité de la sortie ;

On obtient un système de sensibilité donné par l'expression suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = \begin{pmatrix} A(\theta) S_x^1(t) + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_1} x(t) + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_1} u(t) \\ A(\theta) S_x^2(t) + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_2} x(t) + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_2} u(t) \\ \vdots \\ A(\theta) S_x^{n_\theta}(t) + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} x(t) + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} u(t) \end{pmatrix} \\ y_s(t) = \begin{pmatrix} C(\theta) S_x^1(t) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_1} x(t) + \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_1} u(t) \\ C(\theta) S_x^2(t) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_2} x(t) + \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_2} u(t) \\ \vdots \\ C(\theta) S_x^{n_\theta}(t) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} x(t) + \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} u(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.7)$$

L'équation (3.6) peut être mise sous la forme d'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = A_s(\theta) x_s(t) + B_s(\theta) u_s(t) \\ y_s(t) = C_s(\theta) x_s(t) + D_s(\theta) u_s(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

avec :

- la matrice de sensibilité d'état $A_s \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_\theta) \times (n_x \times n_\theta)}$:

$$A_s(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & 0_{n_x \times n_x} & \cdots & 0_{n_x \times n_x} \\ 0_{n_x \times n_x} & A(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_x \times n_x} \\ 0_{n_x \times n_x} & \cdots & 0_{n_x \times n_x} & A(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

- la matrice de sensibilité de commande $B_s \in \mathbb{R}^{(n_x \times n_\theta) \times (n_x + n_m)}$:

$$B_s(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} & \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

– la matrice de sensibilité d'observation $C_s \in \mathbb{R}^{(n_p \times n_\theta) \times (n_x + n_\theta)}$:

$$C_s(\theta) = \begin{pmatrix} C(\theta) & 0_{n_p \times n_x} & \cdots & 0_{n_p \times n_\theta} \\ 0_{n_p \times n_x} & C(\theta) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_p \times n_\theta} \\ 0_{n_p \times n_x} & \cdots & 0_{n_p \times n_\theta} & C(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

– la matrice d'action $D_s \in \mathbb{R}^{(n_p \times n_\theta) \times (n_x \times n_m)}$:

$$D_s(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_2} & \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} & \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_{n_\theta}} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

et

$$u_s(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Comme pour les systèmes dynamiques linéaires, la structure des systèmes décrivant les fonctions de sensibilité est déterminée en fonctions des matrices A , B , C et D .

En outre, la fonction de sensibilité peut être aussi décrite sous forme d'une fonction de transfert en utilisant la transformée de Laplace comme présenté dans le paragraphe suivant.

3.3.2 Analyse de sensibilité basée sur les fonctions de transferts

Pour le cas des systèmes dynamiques linéaires, l'influence dynamique des paramètres peut être déterminée en utilisant les fonctions de transferts. Considérons un système linéaire dont l'entrée est $u(t)$ et la sortie $y(t)$, donné sous la forme d'une équation différentielle d'ordre n :

$$b_n y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{y}(t) + b_0 y(t) = a_m u^{(m)}(t) + a_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{u}(t) + a_0 u(t)$$

En utilisant la transformée de Laplace, ce système peut être décrit sous forme de fonction de transfert :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}$$

avec s la variable de Laplace.

La variation de la sortie par rapport au paramètre θ_i peut alors être exprimée sous forme d'une fonction de transfert sous la forme suivante :

$$S(s) = \frac{\partial Y(s)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial \left(\frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n} \right)}{\partial \theta_i} U(s) \quad (3.14)$$

Cette écriture de la fonction de transfert facilite l'analyse et la description de la dynamique de l'influence des paramètres.

L'analyse de sensibilité basée sur la fonction de transfert sera, par la suite, appliquée et comparée avec la méthode d'analyse de sensibilité basée sur les dérivées partielles.

Le paragraphe suivant est dédié au cas des systèmes non linéaires.

3.3.3 Cas des modèles non linéaires

Nous considérons dans cette partie le cas d'un système dynamique non linéaire, donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), \theta(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), \theta(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

La fonction $f : \mathbb{R}^{n_x \times n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ et la fonction $g : \mathbb{R}^{n_x \times n_m} \rightarrow \mathbb{R}^{n_p}$ sont considérées non linéaires et supposées de classe \mathcal{C}^∞ . Dans ce cas, le modèle contenant les fonctions de sensibilité est non linéaire (voir figure (3.3)).

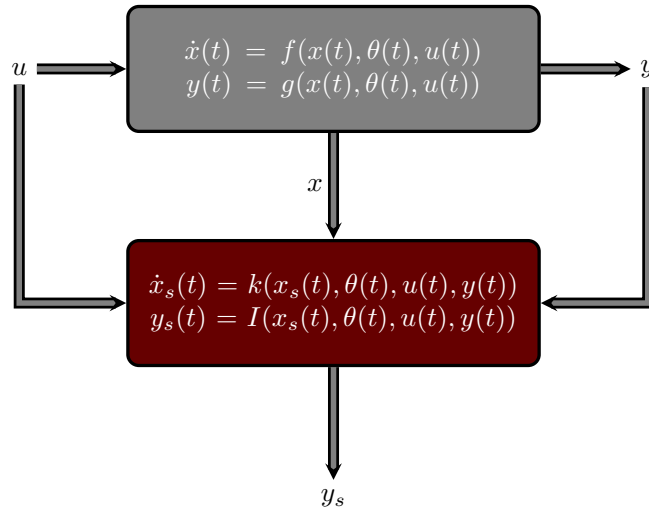


FIGURE 3.3 – Principe de la construction d'un modèle de fonctions de sensibilité pour un système dynamique non linéaire

En dérivant l'équation (3.15) par rapport à un paramètre θ_i , on aboutit à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{S}_x^i(t) = \frac{\partial f}{\partial x} S_x^i(t) + \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \\ \dot{S}_y^i(t) = \frac{\partial g}{\partial x} S_x^i(t) + \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \\ S_x(t_0) = S_{x_0} \end{cases} \quad (3.16)$$

avec $\frac{\partial f}{\partial x}$ la jacobienne de f par rapport à x et donnée comme suit :

$$J_f = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

et $\frac{\partial g}{\partial x}$ la jacobienne de g par rapport à x donnée comme suit :

$$J_g = \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Notons F_i et G_i , respectivement, la dérivée de f et de g par rapport à θ_i .

$$F_i = \frac{\partial f}{\partial \theta_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \theta_i} \end{pmatrix}, \quad G_i = \frac{\partial g}{\partial \theta_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial \theta_i} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Le système de fonctions de sensibilité peut être, alors, écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \begin{pmatrix} J_f(\theta)S_x^1(t) + F_1(\theta) \\ J_f(\theta)S_x^2(t) + F_2(\theta) \\ \vdots \\ J_f(\theta)S_x^{n_\theta}(t) + F_{n_\theta}(\theta) \end{pmatrix} \\ y = \begin{pmatrix} J_g(\theta)S_x^1(t) + G_1(\theta) \\ J_g(\theta)S_x^2(t) + G_2(\theta) \\ \vdots \\ J_g(\theta)S_x^{n_\theta}(t) + G_{n_\theta}(\theta) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.20)$$

Dans la suite, nous appliquons cette méthode, basée sur les dérivées partielles, sur un exemple illustratif et nous interprétons les résultats obtenus.

3.3.4 Exemple illustratif

Dans cette section, nous présentons un exemple académique pour illustrer la méthode décrite dans la section précédente. Considérons un modèle masse-ressort-amortisseur donné par la figure (3.4).

La dynamique de ce système est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = F(t) \quad (3.21)$$

où m , b et k sont respectivement la masse, le coefficient d'amortissement et la raideur du ressort. Le déplacement de la masse est y et la force appliquée $F(t)$.

Nous introduisons le vecteur d'état noté $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ avec $x_1(t)$ et $x_2(t)$ respectivement le

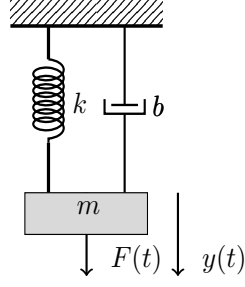


FIGURE 3.4 – Système masse-ressort-amortisseur

déplacement de la masse $y(t)$ et sa vitesse $\dot{y}(t)$.

L'équation (3.20) peut être réécrite sous la forme d'une représentation d'état comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'objectif est d'étudier l'influence, sur le déplacement de la masse, des paramètres m , b et k autour de leurs valeurs nominales qui sont données dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur
m	1 kg
b	1 $\frac{Ns}{m}$
k	4.5 $\frac{N}{m}$

TABLE 3.1 – Valeurs nominales des paramètres

Considérons l'état initial $x(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ qui signifie que le ressort est en position de repos et que la vitesse initiale est nulle. Les fonctions dynamiques de sensibilité, solutions de l'équation (3.6), correspondant à l'influence de m , b et k sur la sortie $x_1(t)$, sont illustrées par la figure (3.5). Pour mettre en évidence l'influence d'un paramètre comparé aux autres paramètres, les fonctions de sensibilité sont normalisées comme suit :

$$S_i(t) = \frac{|S_i(t)|}{\sum_{i=1}^n |S_i(t)|}$$

D'après la figure (3.5), nous remarquons que les paramètres m , b et k sont tous influents sur le déplacement de la masse, dans le régime transitoire. Lorsque le système atteint le régime permanent, seule la raideur du ressort influe sur la variation du déplacement de la masse. Les

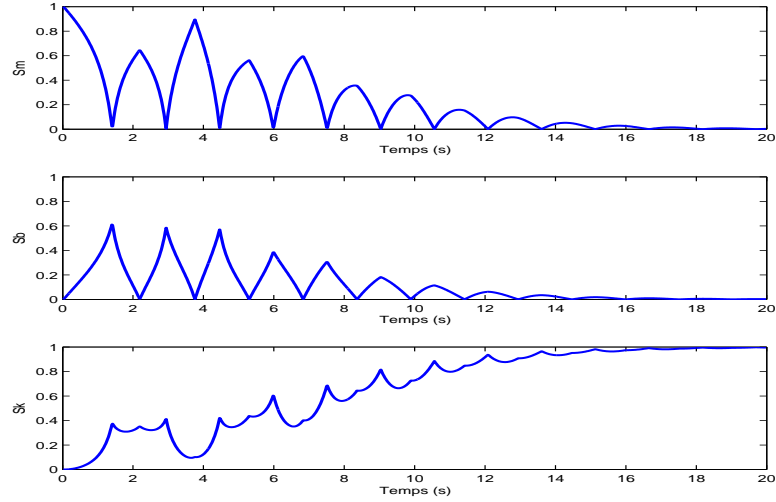


FIGURE 3.5 – Evolution des fonctions de sensibilité associées à m , b et k en fonction du temps après normalisation

résultats obtenus semblent être cohérents. En effet, la vitesse et l'accélération dépendent de la masse m et du coefficient d'amortissement b , par conséquent, ils ne sont influents que dans le régime transitoire. Lorsque la vitesse et l'accélération tendent vers zéro, seul le coefficient de raideur k est influent.

Dans la partie suivante, nous nous intéressons à l'analyse de sensibilité des paramètres d'un modèle de véhicule.

3.3.5 Application sur un modèle de véhicule

Dans cette section, nous allons étudier l'influence de certains paramètres sur le comportement d'un modèle de véhicule. Le modèle de véhicule considéré est le modèle bicyclette. Ce modèle ne se compose que de deux roues. Le véhicule est considéré plan, la hauteur du centre de gravité est nulle et les dynamiques du roulis et du tangage sont négligées. Ce modèle traduit le comportement en lacet et en dérive du véhicule comme il est illustré par la figure (3.6).

Rappelons que α_f et α_r sont les dérives aux essieux avant et arrière données dans le chapitre 1 et β est l'angle de braquage.

Les deux degrés de liberté du modèle sont la vitesse latérale \dot{y} et la vitesse angulaire de lacet du véhicule $\dot{\psi}$.

Les équations suivantes traduisent le principe fondamental de la dynamique et décrivent le mouvement latéral du véhicule :

$$\begin{cases} Ma_y = F_{yf} + F_{yr} \\ I_z \ddot{\psi} = L_f F_{yf} - L_r F_{yr} \end{cases} \quad (3.23)$$

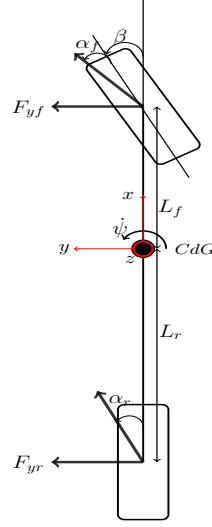


FIGURE 3.6 – Modèle 2ddl dit bicyclette

avec M la masse totale du véhicule et a_y l'accélération du véhicule à son centre de gravité. F_{yf} et F_{yr} sont respectivement les forces latérales générées aux centres de roues avant et arrière. I_z est l'inertie de lacet du véhicule et L_f et L_r sont respectivement les distances entre le centre de gravité G et l'essieu avant et arrière. $\ddot{\psi}$ est l'accélération angulaire de lacet du véhicule. L'accélération a_y peut être décomposée en fonction de l'accélération \ddot{y} et l'accélération centripète $V_x \dot{\psi}$.

$$a_y = \ddot{y} + V_x \dot{\psi} \quad (3.24)$$

En remplaçant l'expression de a_y dans l'équation (3.23), on peut écrire :

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{1}{M}(F_{yf} + F_{yr}) - V_x \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_z}(L_f F_{yf} - L_r F_{yr}) \end{cases} \quad (3.25)$$

Pour des faibles valeurs des angles de dérive, les forces latérales F_{yf} et F_{yr} sont proportionnelles à la dérive via la rigidité de dérive des pneumatiques avant et arrière, C_f et C_r . Ainsi :

$$\begin{cases} F_{yf} = 2C_f \alpha_f \\ F_{yr} = 2C_r \alpha_r \end{cases} \quad (3.26)$$

A noter que dans le modèle bicyclette, les deux roues d'un même essieu étant confondues, la rigidité aux essieux est considérée comme le double de celle à la roue.

En outre, la dérive aux essieux avant α_f et arrière α_r peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_f = \arctan\left(\frac{V_y + L_f \dot{\psi}}{V_x}\right) - \beta \\ \alpha_r = \arctan\left(\frac{V_y - L_r \dot{\psi}}{V_x}\right) \end{cases} \quad (3.27)$$

Lorsque le pneumatique est faiblement sollicitée, les angles de dérive peuvent être approchés sous cette forme :

$$\begin{cases} \alpha_f = \frac{V_y + L_f \dot{\psi}}{V_x} - \beta \\ \alpha_r = \frac{V_y - L_r \dot{\psi}}{V_x} \end{cases} \quad (3.28)$$

En remplaçant les équations (3.28) et (3.26) dans (3.25), on obtient des équations différentielles linéaires. Finalement, en choisissant le vecteur d'état X sous la forme suivante :

$$X = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

On obtient le système d'équations différentielles sous la forme d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX \end{aligned} \quad (3.29)$$

U est le signal d'entrée (angle de braquage β), et les matrices A et B sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 \times \frac{C_f + C_r}{MV_x} & 2 \times \frac{l_f C_f - l_r C_r}{MV_x} - V_x \\ 2 \times \frac{l_f C_f - l_r C_r}{I_z V_x} & 2 \times \frac{l_f^2 C_f + l_r^2 C_r}{I_z V_x} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \times \frac{C_f}{M} \\ -2 \times \frac{l_f C_f}{I_z} \end{bmatrix}$$

Si la sortie considérée est la vitesse latérale \dot{y} alors $C = [1 \ 0]$ sinon, s'il s'agit de la vitesse angulaire de lacet $\dot{\psi}$ donc $C = [0 \ 1]$.

Nous allons alors étudier l'influence des paramètres incertains M , L_f , L_r , C_f , C_r , I_z et V_x sur la vitesse latérale \dot{y} et la vitesse angulaire de lacet $\dot{\psi}$. La sensibilité de la vitesse latérale et de la vitesse latérale de lacet est calculée autour des valeurs nominales des paramètres, données dans le tableau 3.2.

Paramètre	Valeur
M	1200 kg
L_f	0.90 m
L_r	1.10 m
C_f	-66 000 $\frac{N}{rad}$
C_r	-54 000 $\frac{N}{rad}$
I_z	1 800 kg m ²
V_x	11 $\frac{m}{s}$

TABLE 3.2 – Valeurs nominales des paramètres

En passant par la transformée de Laplace, les fonctions de transfert $\frac{\dot{y}}{\beta}$ et $\frac{\dot{\psi}}{\beta}$ sont données par les équations suivantes :

$$\frac{\dot{y}(s)}{\beta(s)} = \frac{\left(-\frac{2L_f C_f}{I_z}\right)s + \left(\frac{-4(L_f C_f - L_r C_r)}{(I_z V_x)} \frac{C_f}{M} + 4 \frac{(C_f + C_r)}{MV_x} \frac{L_f C_f}{I_z}\right)}{s^2 - \left(2 \frac{(C_f + C_r)}{MV_x} + 2 \frac{L_f^2 C_f + L_r^2 C_r}{I_z V_x}\right)s + \left(4 \frac{(C_f + C_r)}{MV_x} \frac{L_f^2 C_f + L_r^2 C_r}{I_z V_x} - \left(\frac{2(L_f C_f - L_r C_r)}{MV_x} - V_x\right) \left(\frac{2(L_f C_f - L_r C_r)}{I_z V_x}\right)\right)}$$

et

$$\frac{\dot{\psi}(s)}{\beta(s)} = \frac{\left(-\frac{2C_f}{M}\right)s + \left(\left(\frac{2(L_f C_f - L_r C_r)}{M V_x} - V_x\right)\left(-\frac{2L_f C_f}{I_z}\right) + 4\frac{L_f^2 C_f + L_r^2 C_r}{I_z V_x} \frac{C_f}{M}\right)}{s^2 - \left(2\frac{(C_f + C_r)}{M V_x} + 2\frac{L_f^2 C_f + L_r^2 C_r}{I_z V_x}\right)s + \left(4\frac{(C_f + C_r)}{M V_x} \frac{L_f^2 C_f + L_r^2 C_r}{I_z V_x} - \left(\frac{2(L_f C_f - L_r C_r)}{M V_x} - V_x\right)\left(\frac{2(L_f C_f - L_r C_r)}{I_z V_x}\right)\right)}$$

3.3.5.1 Signal de commande

Afin d'étudier la sensibilité de la vitesse de lacet et de la vitesse latérale du véhicule, vis-à-vis des paramètres cités précédemment, le signal d'entrée (angle de braquage β), est choisi comme indiqué sur la figure suivante.

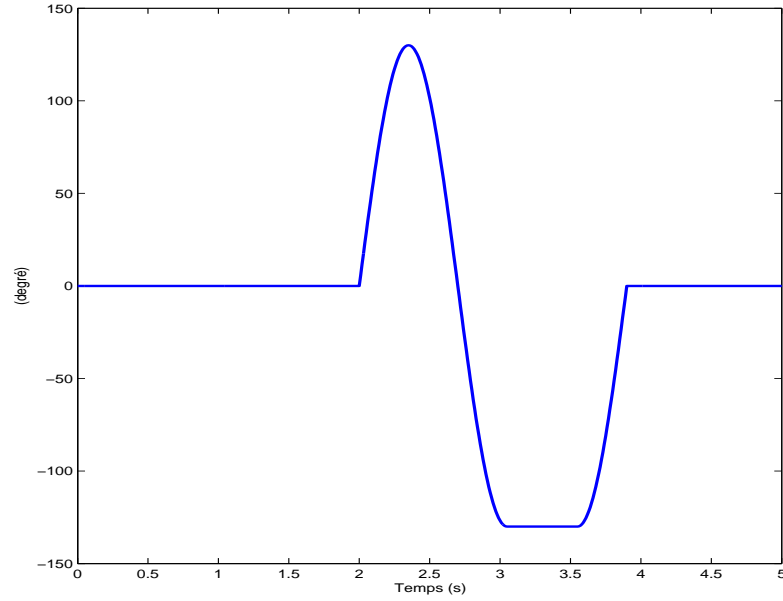


FIGURE 3.7 – Angle de braquage

Cette manoeuvre est du type "Sinus avec palier" (Sine with Dwell) qui est largement utilisée pour tester la situation d'évitement d'urgence [69].

3.3.5.2 Résultats

Les fonctions de sensibilité des paramètres présentant la contribution des paramètres autour de leurs valeurs nominales, obtenues à partir des dérivées partielles en calculant le système (3.6) et les fonctions de transferts (3.13), sont données par les figures (3.8), (3.9), (3.10) et (3.11).

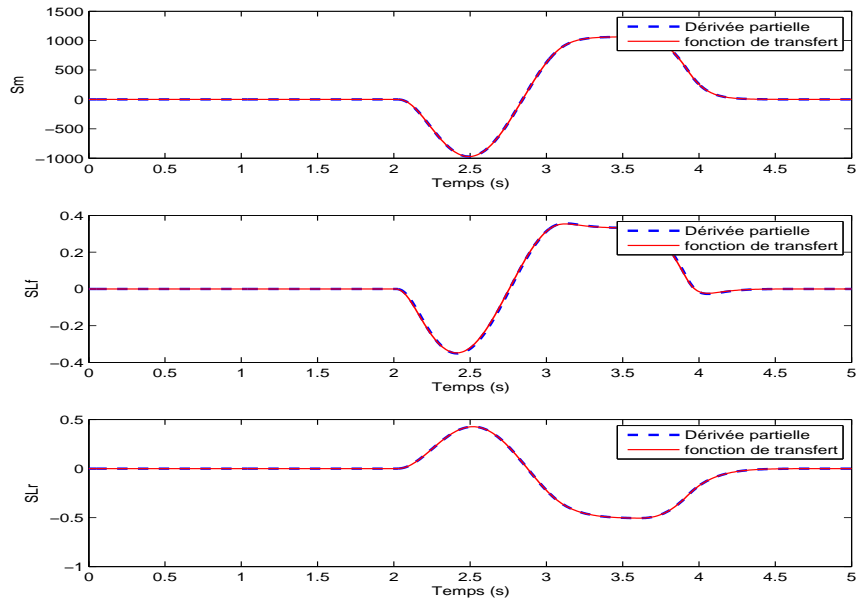


FIGURE 3.8 – Evaluation de l'influence des paramètres M , L_f et L_r sur la vitesse latérale en fonction du temps

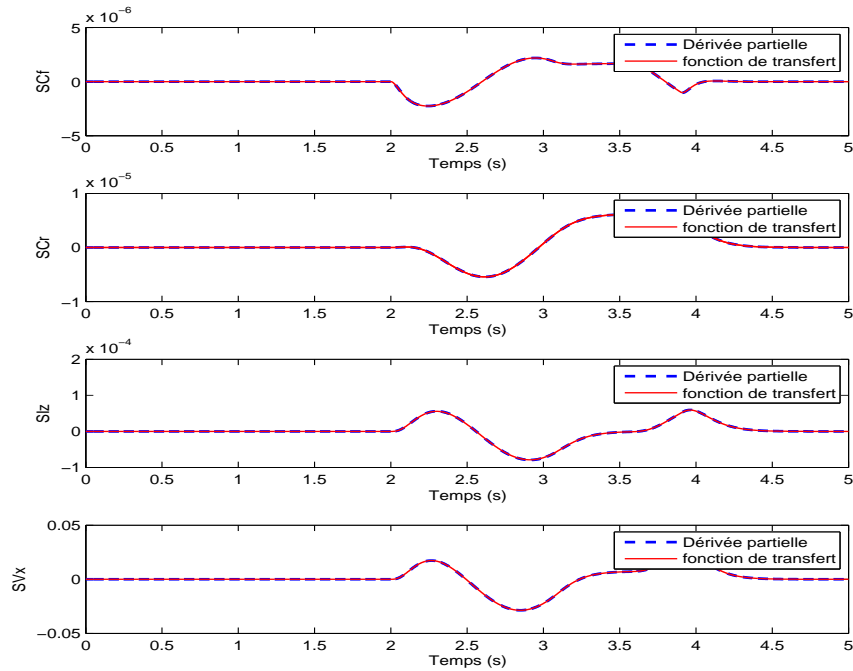


FIGURE 3.9 – Evaluation de l'influence des paramètres C_r , C_f , I_z et V_x sur la vitesse latérale en fonction du temps

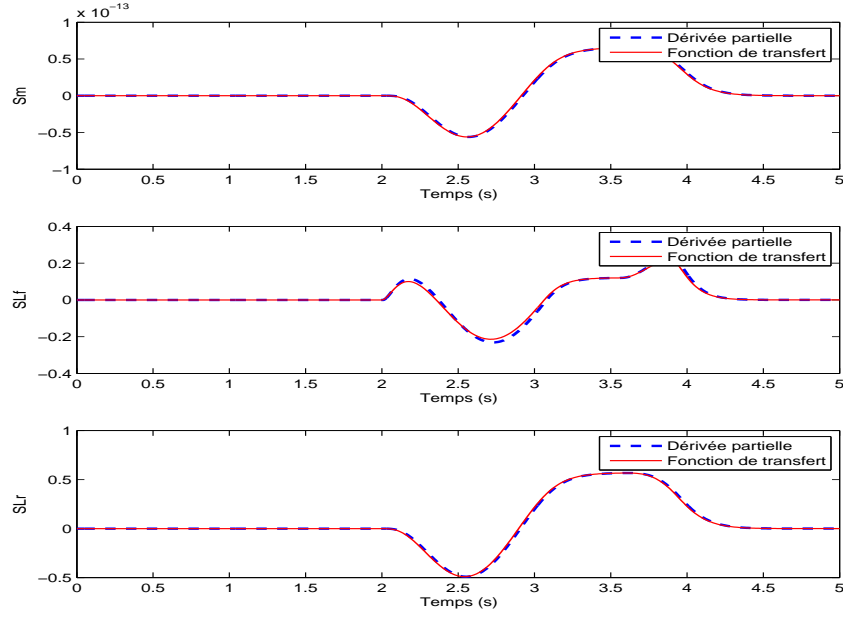


FIGURE 3.10 – Evaluation de l'influence des paramètres M , L_f et L_r sur la vitesse angulaire de lacet en fonction du temps

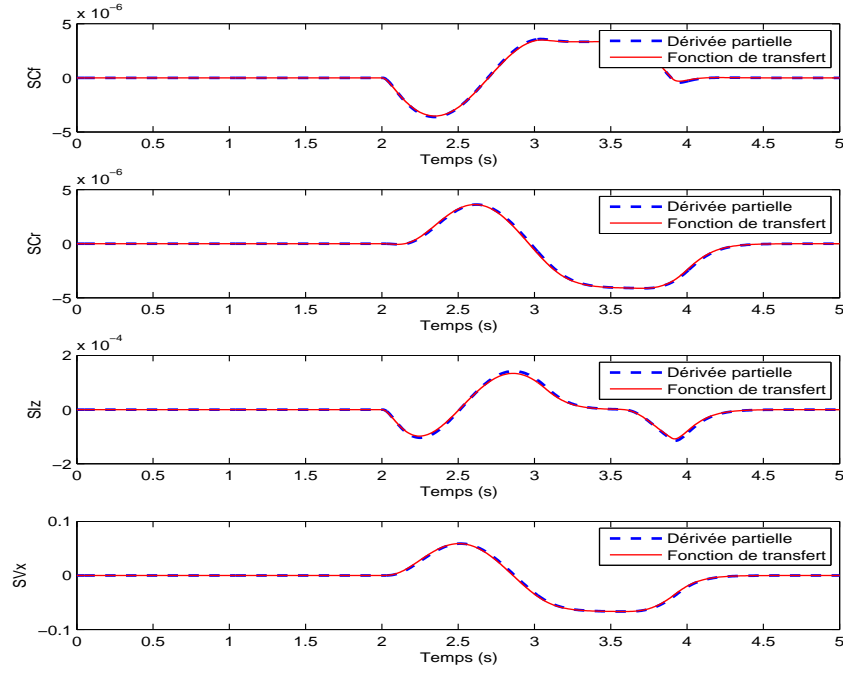


FIGURE 3.11 – Evaluation de l'influence des paramètres C_r , C_f , I_z et V_x sur la vitesse angulaire de lacet en fonction du temps

Les figures montrent une adéquation des résultats obtenus par la méthode des dérivées partielles et celle des fonctions de transfert. Sur la figure (3.8), nous constatons que la masse est influente sur la vitesse latérale et n'est pas influente sur la variation de la vitesse angulaire de lacet. D'autre part, nous constatons que les paramètres liés à la géométrie du véhicule L_f et L_r sont les plus influents sur la vitesse latérale et la vitesse angulaire de lacet du véhicule (voir figures (3.8) et (3.10)). En réalité, la géométrie influence directement le comportement du véhicule. Elle favorise la stabilité du véhicule en ligne droite, la tenue de la route et la sécurité pour le conducteur. Ensuite vient la vitesse longitudinale. Par ailleurs, les fonctions de sensibilité correspondant à I_z , C_f et C_r indiquent une faible influence sur la vitesse latérale et la vitesse angulaire de lacet comme indiqué sur les figures (3.9) et (3.11). Ces résultats sont cohérents et rejoignent les résultats obtenus dans [70] où un modèle Bond graph incertain de modèle bicyclette est construit et où l'influence des paramètres est déterminée graphiquement en variant et en observant la dynamique de la sensibilité.

3.3.6 Comparaison entre une analyse de sensibilité locale et globale

Dans cette section, nous allons comparer les fonctions de sensibilité obtenues par une méthode locale et une autre globale.

Dans [71], Sobol intègre l'indice de sensibilité basé sur la dérivée partielle (3.1) afin d'obtenir un indice global de sensibilité tel que :

$$S_i(t) = E \left(\left(\frac{\partial y(t)}{\partial \theta_i} \Big|_{\theta_i = \theta_i^0} \right)^2 \right) \quad (3.30)$$

A travers l'exemple académique masse-ressort-amortisseur présenté précédemment, nous présentons la différence entre les fonctions de sensibilité obtenues par une méthode locale qui est basée sur la dérivée partielle (en appliquant (3.30) pour calculer les fonctions de sensibilité) et une méthode globale qui est l'extension de l'approche des polynômes du chaos en dynamique.

Dans [65], une étude de l'influence des paramètres m , b et k a été effectuée et l'approche des polynômes du chaos a été appliquée à chaque pas d'échantillonnage. La figure (3.12) illustre l'évolution des fonctions de sensibilité obtenues en calculant la dérivée partielle autour d'une valeur nominale (a) et en appliquant l'approche des polynômes du chaos à chaque instant, en tenant compte de tout l'intervalle de variation des paramètres (b).

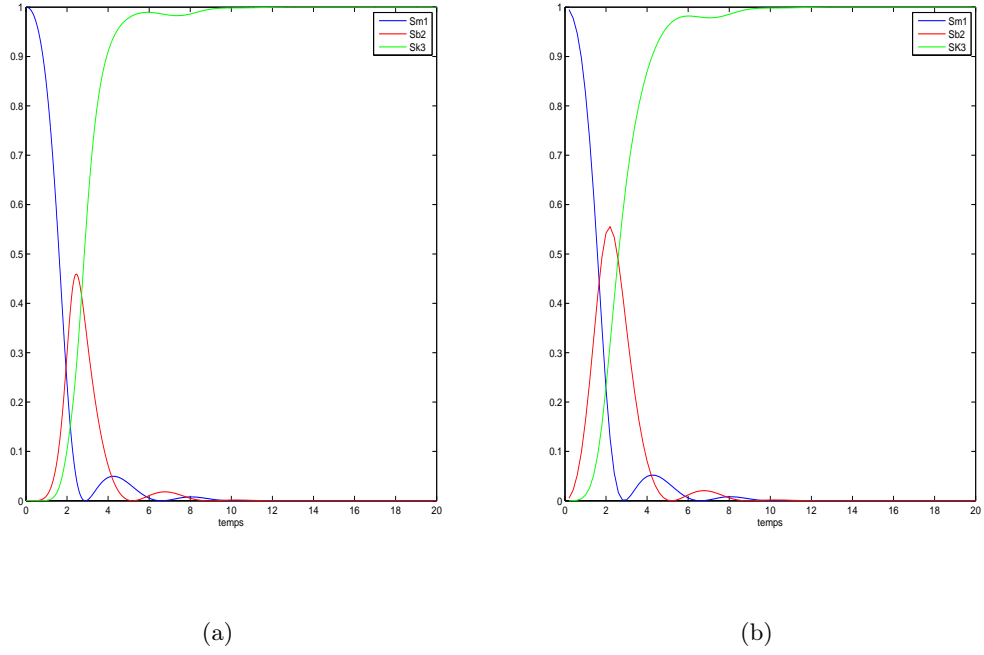


FIGURE 3.12 – (a) Fonctions de sensibilité obtenues par les dérivées partielles , (b) Fonctions de sensibilité obtenues par les polynômes du chaos

Nous remarquons, d'après la figure (3.12) que les fonctions de sensibilité obtenues par les deux méthodes sont similaires : en régime transitoire tous les paramètres sont influents et en régime permanent, seul le coefficient de raideur est influent.

La méthode des dérivées partielles permet de déterminer l'influence des paramètres localement, autour d'une valeur nominale, en tenant compte de la dynamique du modèle. Souvent, ces méthodes peuvent s'avérer insuffisantes voire erronées. En effet, l'intervalle de variation des paramètres peut être relativement large comme dans le domaine de l'automobile.

D'autre part, les méthodes globales étendues au cas dynamique étudient l'influence des paramètres sur tout l'intervalle de variation mais il n'y a pas la notion de récursivité en calculant les fonctions de sensibilité. En outre, ces méthodes sont coûteuses en terme de temps de calcul car elles nécessitent le calcul des indices de sensibilité à chaque instant. Cela entraîne un grand nombre d'indices, ce qui n'est pas toujours facile à interpréter.

Pour pallier ces limites, nous allons proposer dans la partie suivante une technique d'analyse de sensibilité dynamique où la sensibilité des paramètres est déterminée à travers l'énergie échangée entre le système et son environnement.

3.4 Analyse de sensibilité basée sur les Grammiens

Les méthodes d'analyse de sensibilité présentées précédemment, déterminent l'influence des paramètres sur les sorties du modèle. Dans cette partie, nous présentons une méthodologie d'analyse de sensibilité qui s'intéresse à l'influence des paramètres sur la variation de l'énergie consommée en entrée et restituée par le système en sortie. L'avantage de cette technique est que les paramètres peuvent être classifiés selon leurs influences sur l'énergie consommée ou restituée, tout au long de la dynamique du système. D'autre part, l'étude de la sensibilité des paramètres sur les échanges de l'énergie, permet aussi de déterminer un placement optimal des paramètres pour une optimisation de l'énergie consommée et restituée en sortie. Cette idée sera développée et présentée dans la dernière partie du chapitre.

Les Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité permettent de formaliser ces deux énergies et sont présentés dans le paragraphe suivant.

3.4.1 Grammien et énergie d'entrée et de sortie

Les Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité sont deux outils permettant d'étudier l'atteignabilité et l'observabilité des états d'un système. Dans cette section, on rappelle les définitions et les théorèmes sur ces deux notions.

3.4.1.1 Grammien d'atteignabilité et d'observabilité

Considérons le modèle linéaire décrit par l'équation (3.2).

Définition 3.4.1 *Un système est dit atteignable sur $[t_0, t_f]$ si pour tout état initial $x(t_0) = 0$ et pour tout état final $x(t_f) = x_f$, il existe une commande $u(t)$ permettant d'amener le système d'un état $x(t_0) = 0$ à un état $x(t_f) = x_f$, en un temps $t_f - t_0 > 0$ fini.*

Le Grammien d'atteignabilité fini $W_R(t_0, t_f)$ est défini par :

$$W_R(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-t)} B B^T e^{A^T(t_f-t)} dt \quad (3.31)$$

Le Grammien d'atteignabilité $W_R(t_0, t_f)$ est une matrice symétrique définie positive pour $t_0 < t_f$.

Définition 3.4.2 *Un système est dit observable sur l'intervalle de temps $[0, t]$, si l'état initial $x(t_0)$ peut être déterminé à partir de la connaissance des mesures $y(t)$ et de la commande $u(t)$.*

Le Grammien d'observabilité $W_o(t_0, t_f)$ est défini par :

$$W_o(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(t-t_0)} C^T C e^{A(t-t_0)} dt \quad (3.32)$$

Le Grammien d'observabilité $W_o(t_0, t_f)$ est une matrice symétrique définie positive pour $t_0 < t_f$.

Remarque 3.4.1 Le Grammien d'atteignabilité infini ($t \rightarrow \infty$) W_R est donné par :

$$W_R = \lim_{t \rightarrow \infty} W_R(t_0, t_f) = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (3.33)$$

Respectivement le Grammien d'observabilité infini W_o est sous cette forme :

$$W_o = \lim_{t \rightarrow \infty} W_o(t_0, t_f) = \int_0^{\infty} e^{At} C^T C e^{A^T t} dt \quad (3.34)$$

Dans le cas où le système est asymptotiquement stable, les Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité infinis W_R et W_o peuvent être évalués à partir des équations de Lyapunov suivantes :

$$A W_R + W_R A^T + B B^T = 0 \quad (3.35)$$

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \quad (3.36)$$

Remarque 3.4.2 En temps discret, les Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité sont exprimés comme suit :

$$W_R = \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} B B^T (A^{k-1})^T \quad (3.37)$$

$$W_o = \sum_{k=1}^{\infty} (A^{k-1})^T C^T C A^{k-1} \quad (3.38)$$

et sont les solutions des équations de Lyapunov discrètes suivantes :

$$A W_R A^T - W_R + B B^T = 0 \quad (3.39)$$

$$A^T W_o A - W_o + C^T C = 0 \quad (3.40)$$

3.4.2 Commande optimale et énergie minimale

Si un système est atteignable, il existe une commande optimale u_{opt} permettant d'amener le système depuis une condition initiale nulle vers un état final désiré tout en minimisant l'énergie. La commande optimale $u_{opt}(t)$ minimise alors le critère suivant :

$$u_{opt}(t) = \arg \min \left\{ \int_0^t \|u(t)\|^2 dt \right\}$$

Théorème 3.4.2.1 Si le Grammien d'atteignabilité est inversible, alors il existe une commande u_{opt} dite optimale qui permet de transférer le système d'un état initial x_0 à un état final x_f et elle est donnée par :

$$u_{opt}(t) = B^T e^{A(t_f-t)} W_R^{-1}(t_0, t_f) x(t_f) \quad (3.41)$$

Démonstration La valeur minimale de l'énergie J_u du signal d'entrée $u(t)$ pour atteindre un état final x_f est donnée par :

$$\begin{aligned}
 J_u &= u_{opt}(t)^T u_{opt}(t) \\
 &= (B^T e^{A(t_f-t)} W_R^{-1}(t_0, t_f) x(t_f))^T (B^T e^{A(t_f-t)} W_R^{-1}(t_0, t_f) x(t_f)) \\
 &= x(t_f)^T W_R^{-1}(t_0, t_f) e^{A(t_f-t)} B B^T e^{A(t_f-t)} W_R^{-1} x(t_f) \\
 &= x(t_f)^T W_R^{-1}(t_0, t_f) x(t_f)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Théorème 3.4.2.2 L'énergie minimale pour amener un système à x_f , depuis $x(t_0) = 0$, en un temps infini, est donnée par :

$$\|u\|_2 = \int_0^\infty u^T(t) u(t) dt = x_f^T W_R^{-1} x_f \tag{3.43}$$

$x_f^T W_R^{-1} x_f$ représente un hyperellipsoïde qui englobe l'ensemble des états atteignables grâce à la commande u . Une grande valeur de l'énergie signifie qu'il y a des états qui nécessitent plus d'énergie pour les déplacer et une petite valeur signifie que les états sont aisément commandables [72]. D'autre part, l'étude de la sensibilité de l'énergie consommée suite à la variation des paramètres peut être effectuée.

D'après l'équation (3.43), on peut voir que l'énergie consommée en entrée dépend de l'inverse du Grammien d'atteignabilité. Les valeurs propres de ce dernier dépendent des paramètres et sont associées aux états du système. Ces valeurs propres déterminent la taille des axes de l'hyperellipsoïde et les vecteurs propres déterminent sa direction. Les plus grands axes de l'hyperellipsoïde correspondent aux états les plus excitables.

Par conséquent, à partir de la structure de l'inverse du Grammien, la détermination des paramètres influents et non influents sur les états est possible.

L'avantage de cette technique d'analyse de sensibilité est que l'étude de l'influence des paramètres peut être réalisée à travers l'utilisation du Grammien d'atteignabilité infini ce qui rend la méthode adaptée aux modèles dynamiques.

De la même manière que l'atteignabilité, l'énergie de sortie d'un système, générée par un état initial x_0 vers l'origine $x(t_f) = 0$, est donnée par :

$$\|y\|_2 = \int_0^\infty y^T(t) y(t) dt = x_0^T W_o x_0 \tag{3.44}$$

A partir de la matrice de Grammien d'observabilité W_o , les paramètres influents sur l'observabilité des états peuvent être déterminés. En effet, les valeurs propres de W_o sont en fonction des paramètres et déterminent la taille des axes de l'hyperellipsoïde. Par conséquent, les paramètres influents sur l'énergie collectée en sortie peuvent être déterminés.

Les paramètres influents sur l'énergie d'entrée et l'énergie de sortie peuvent ainsi être déterminés

à partir de la matrice de Grammien d'atteignabilité et la matrice d'observabilité. Ces dernières sont déterminées à partir de la matrice d'état A , la matrice de commande B et la matrice d'observation C .

3.4.2.1 Exemple illustratif

Reprenons l'exemple académique masse-ressort-amortisseur.

Dans cet exemple, on décrit la méthode proposée et la manière d'interpréter les résultats. On se limite à déterminer les paramètres dont leurs variations contribuent à une variation de l'énergie consommée en entrée.

Le Grammien d'atteignabilité est déterminé à partir de l'équation (3.35). Son inverse est calculé et donné sous la forme suivante :

$$W_R^{-1} = \begin{bmatrix} 2.bk & 0 \\ 0 & 2.bm \end{bmatrix}$$

L'inverse du Grammien d'atteignabilité est une matrice diagonale $W_R^{-1} = \text{diag}(\lambda_{R_1}, \lambda_{R_2})$, où les λ_{R_i} sont les valeurs propres de W_R qui dépendent des paramètres m , b et k . Nous rappelons ici que $x_1(t)$ correspond au déplacement et $x_2(t)$ à la vitesse de la masse. A partir du Grammien d'atteignabilité, on peut remarquer que la valeur propre associée au déplacement de la masse est en fonction de b et k . Ces paramètres sont alors influents sur cet état alors que la masse m est négligeable. D'autre part, la valeur propre associée à la vitesse dépend de m et b , montrant que ces deux paramètres sont influents sur la vitesse et que l'influence de k est négligeable.

Notons qu'à partir de la structure de la matrice du Grammien d'atteignabilité, nous ne pouvons que déterminer si la variation d'un état donné dépend d'un tel paramètre ou pas. Autrement dit, en se basant toujours sur cet exemple, nous avons trouvé que les paramètre b et k sont influents ensemble mais nous ne pouvons pas quantifier le degré d'influence de chaque paramètre.

Considérons l'état initial $x(t_0) = (0, 0)$ et l'état final $x(t_f) = (1, 0)$. La figure (3.13) illustre l'hyperellipsoïde représentant l'espace atteignable c'est-à-dire l'énergie consommée pour atteindre l'état final $x(t_f) = (1, 0)$ pour les ensembles suivants de paramètres [$m = 1, b = 1, k = 1$], [$m = 1, b = 1, k = 2$], [$m = 2, b = 1, k = 1$] et [$m = 1, b = 2, k = 1$].

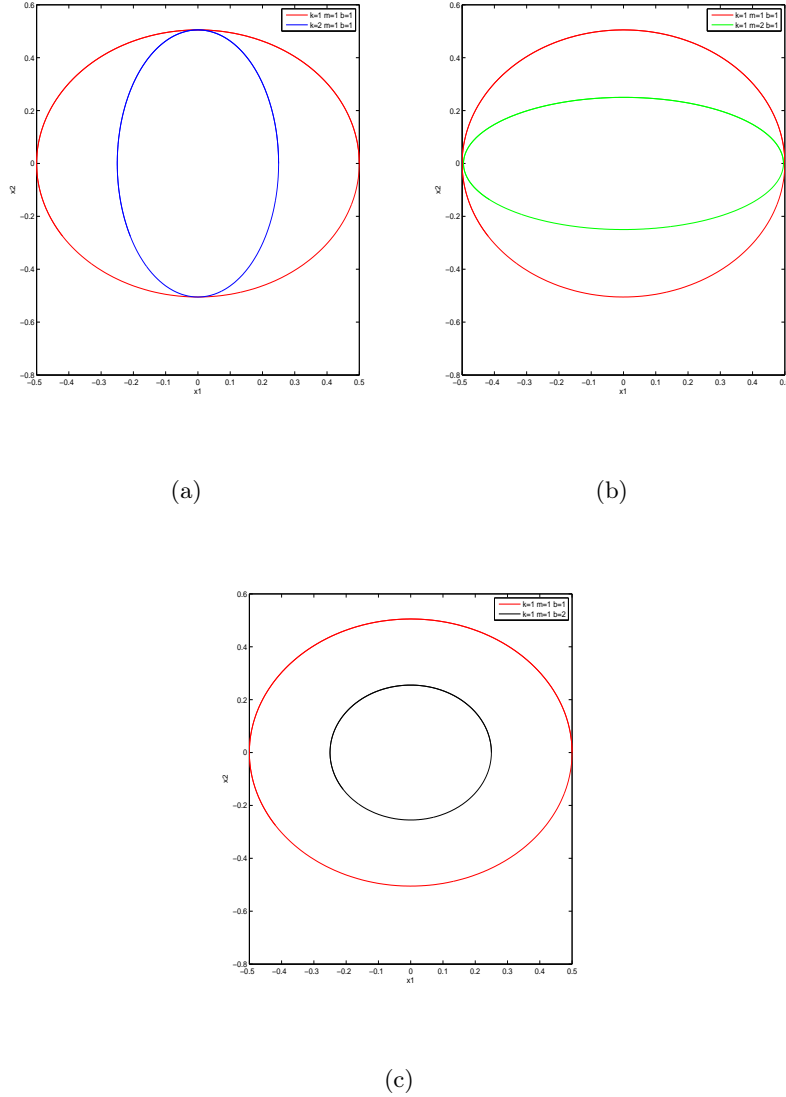


FIGURE 3.13 – Tracés des ellipses d’atteignabilité pour une variation du coefficient de raideur k (a), une variation de la masse m (b) et une variation du coefficient d’amortissement b (c)

D’après la figure (3.13)(a), nous remarquons qu’une variation du paramètre k entraîne une diminution de la taille de l’axe de l’hyperellipsoïde suivant $x_1(t)$ sans varier la taille de l’axe suivant $x_2(t)$. On peut conclure que le coefficient d’amortissement b influe uniquement sur le déplacement. Inversement au paramètre k , la variation du paramètre m influe uniquement sur la taille de l’axe de l’hyperellipsoïde suivant $x_2(t)$ mais pas $x_1(t)$ (voir figure (3.13),(b)). La masse m est alors influente uniquement sur la vitesse $x_2(t)$. Cependant la variation de b provoque la variation des tailles des axes suivant $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (voir figure (3.13),(c)).

Pour un état final $x(t_f) = (1, 0)$, la figure (3.14) illustre l’énergie consommée en fonction du temps pour les différents ensembles des paramètres.

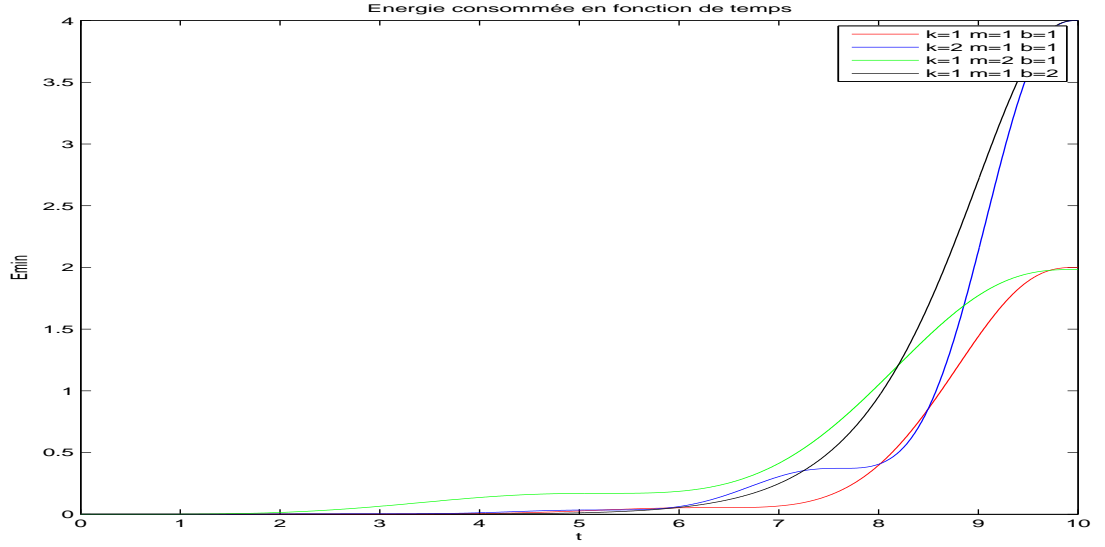


FIGURE 3.14 – Energie consommée en fonction de temps pour différentes valeurs de paramètres

Nous constatons que la variation de m aboutit à la même énergie consommée à $t = t_f$. Ce paramètre est alors non influent sur la variation de l'énergie consommée ainsi que sur le déplacement de la masse. Par contre, en variant les paramètres b et k , la valeur de l'énergie augmente donc ces paramètres influent sur le déplacement et leurs variations rendent cet état plus difficile à commander. Les résultats illustrés par la figure (3.14) peuvent être aussi déterminés à partir de la figure (3.13) où la variation de ces paramètres influe sur la longueur des vecteurs propres associés à x_1 qui correspond au déplacement de la masse.

Pour étudier l'influence des paramètres sur la vitesse de la masse, il suffit de choisir un état final $x(t_f) = (0, 1)$.

De la même manière, l'étude de l'influence des paramètres sur l'énergie restituée peut être effectuée en considérant le Grammien d'observabilité.

3.4.3 Placement optimal des paramètres

Nous souhaitons dans cette partie déterminer l'influence des paramètres sur l'énergie consommée en entrée et collectée en sortie. Cela nous permet de proposer une technique de placement optimal des paramètres, cette méthode rejoint les techniques utilisées pour le placement de capteur et d'actionneur [73, 74]. Ces techniques ont pour but de déterminer les éléments de la matrice de commande B et la matrice d'observation C alors que nous nous intéressons aux paramètres θ qui interviennent dans les matrices A , B , C et D comme il est indiqué sur la figure (3.15). Dans les paragraphes suivants, nous montrons comment on sélectionne les paramètres pour avoir une énergie minimale en entrée et une énergie maximale collectée en sortie.

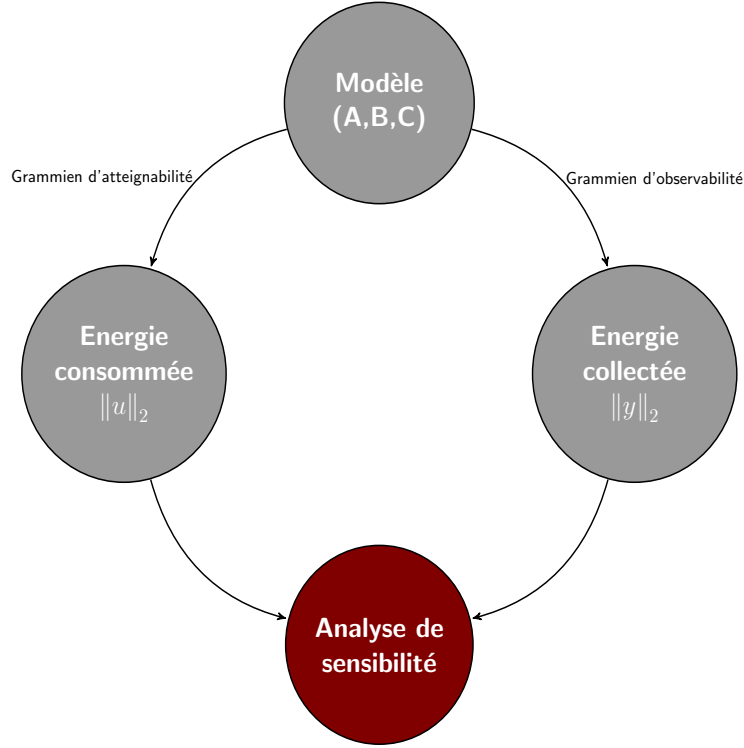


FIGURE 3.15 – Analyse de sensibilité à partir des Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité

3.4.3.1 Placement optimal des paramètres pour une énergie minimale consommée en entrée

L'énergie minimale nécessaire pour atteindre l'état final $x(t_f) = x_f$ au temps t_f à partir d'un état initial nul $x(t_0) = 0$ est inversement proportionnelle au Grammien d'atteignabilité (3.43). Etudier l'influence des paramètres est équivalent à déterminer les paramètres qui permettent d'atteindre l'état final x_f avec un minimum d'énergie. Ce critère est défini par :

$$\arg \min_{\theta_i, i \in [1, \dots, n_\theta]} (\|u\|_2) = \arg \min_{\theta_i, i \in [1, \dots, n_\theta]} (x_f^T W_R^{-1}(t_0, t_f) x_f) \quad (3.45)$$

qui revient à écrire :

$$\arg \min_{\theta_i, i \in [1, \dots, n_\theta]} (Trace(W_R^{-1}(t_0, t_f))) \quad (3.46)$$

Remarque 3.4.3 Lorsque $(t_f \rightarrow \infty)$ ce critère devient :

$$\arg \min_{\theta_i, i \in [1, \dots, n_\theta]} (Trace(W_R^{-1})) \quad (3.47)$$

3.4.3.2 Exemple académique

Considérons le modèle masse-ressort-amortisseur décrit dans la section précédente. Les paramètres k , b et m varient respectivement dans les intervalles $[0.1, 4]$, $[0.01, 1.2]$ et $[0.01, 1.1]$. Pour

un état final $x(t_f) = (1, 0)$, les valeurs des paramètres solution de l'équation (3.45) et l'énergie qui correspond à cet ensemble sont données dans le tableau suivant.

Paramètre optimaux	$(k = 0, 1, b = 0, 01, m = 0, 4131)$
Energie consommée	0.0076

TABLE 3.3 – Valeurs optimales des paramètres et énergie consommée

Nous remarquons que les paramètres optimaux correspondent à des valeurs minimales de k et de b . Ces résultats sont expliqués du fait que l'énergie consommée pour atteindre un état $x(t_f) = (1, 0)$ dépend de k et de b . Pour une énergie minimale, les paramètres k et b doivent aussi être minimaux. La figure (3.16) illustre l'évolution de la fonction coût donnée par (3.45) au cours des itérations.

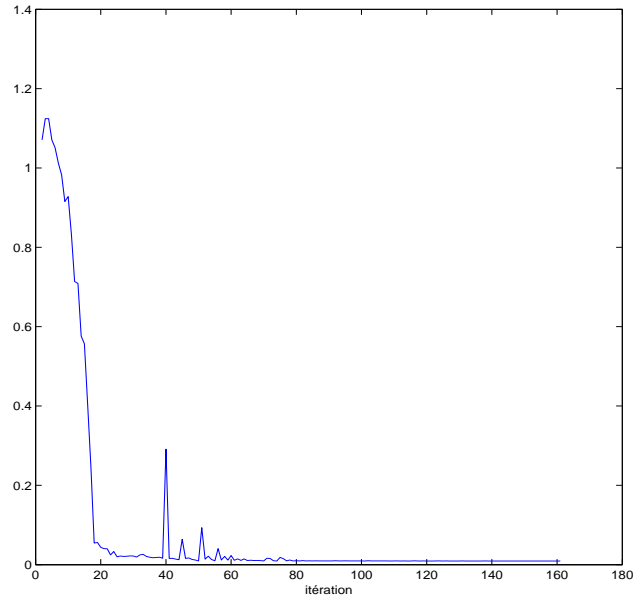


FIGURE 3.16 – Evolution de la fonction coût en fonction des itérations

La figure (3.17) illustre l'énergie consommée qui correspond à un placement optimal des paramètres ($k = 0, 1, b = 0, 01, m = 0, 4131$) et un placement non optimal pour l'ensemble des paramètres correspondant au milieu des intervalles de variation ($k = 1, 95, b = 0, 595, m = 0, 545$). La figure (3.17) montre clairement que l'énergie consommée correspondant à un placement optimal est beaucoup plus faible que celle d'un placement non optimal.

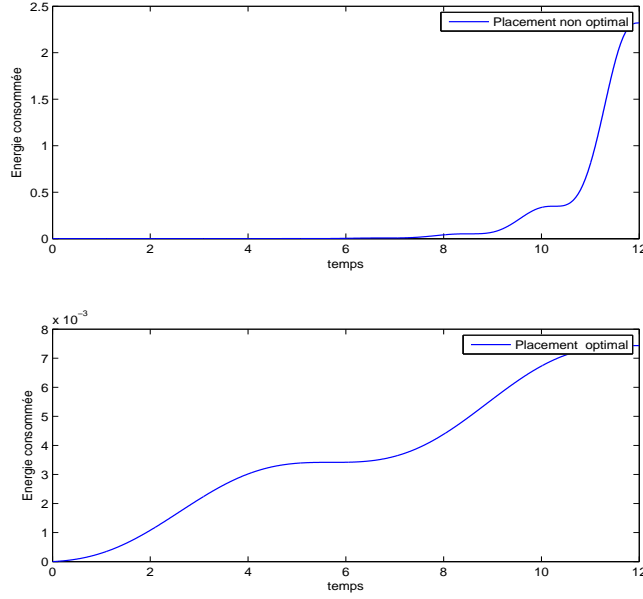


FIGURE 3.17 – Comparaison des énergies de sorties obtenues pour le placement optimal et un placement non optimal

3.4.3.3 Placement optimal des paramètres pour une énergie maximale fournie en sortie

D'après l'équation (3.44), l'énergie fournie en sortie est proportionnelle au Grammien d'observabilité W_o . Le problème d'influence des paramètres θ_i se ramène à maximiser l'énergie fournie et par conséquent le Grammien d'observabilité.

De manière analogue à l'étude de sensibilité de l'énergie consommée et afin de déterminer les paramètres influents on définit le critère suivant :

$$\arg \max_{\theta_i, i \in [1, \dots, n_\theta]} (\|y\|_2) = \arg \max_{\theta_i, i \in [1, \dots, n_\theta]} (x_0^T W_o(t_0, t_f) x_0) \quad (3.48)$$

qui revient à écrire :

$$\arg \max_{\theta_i, i \in [1, \dots, n_\theta]} (Trace(W_o(t_0, t_f))) \quad (3.49)$$

Remarque 3.4.4 Lorsque $(t_f \rightarrow \infty)$ ce critère devient :

$$\arg \max_{\theta_i, i \in [1, \dots, n_\theta]} (Trace(W_o)) \quad (3.50)$$

3.4.3.4 Placement optimal des paramètres pour une optimisation de l'énergie consommée et collectée en sortie

Les deux critères précédemment présentés permettent de déterminer les paramètres optimaux pour avoir une énergie minimale consommée et une énergie maximale collectée en sortie. Il est possible de trouver un compromis entre ces deux objectifs. Cela peut être réalisée en cherchant les paramètres qui maximisent le rapport de l'énergie collectée en sortie par l'énergie consommée. Ce critère peut être défini comme suit :

$$\arg \max_{\theta_i \in [1, \dots, n_\theta]} \left(\|y\|_2 \|u\|_2^{-1} \right) \quad (3.51)$$

3.5 Application sur un modèle de véhicule

Afin d'illustrer la méthode d'analyse de sensibilité basée sur la variation de l'énergie consommée en entrée et fournie en sortie, le modèle bicyclette décrivant la dynamique de véhicule présenté dans la première partie de ce chapitre est retenu.

On considère le modèle de la dynamique de véhicule décrit par la représentation d'état (3.29) et nous rappelons l'objectif qui est la détermination des paramètres influents sur la vitesse latérale et la vitesse angulaire du lacet.

3.5.1 Etude de l'influence des paramètres d'un modèle bicyclette sur la variation de l'énergie consommée en entrée

Pour étudier l'influence des paramètres sur l'énergie consommée, nous considérons deux cas, en respectant les unités adéquates à savoir $\frac{m}{s}$ pour la vitesse latérale et $\frac{rad}{s}$ pour la vitesse angulaire :

- $x(t_f) = (1; 0, 01)$: ce cas correspond à l'étude de l'influence des paramètres sur l'état x_1 qui correspond à la vitesse latérale.
- $x(t_f) = (0, 01; 1)$: ce cas correspond à l'étude de l'influence des paramètres sur l'état x_2 correspondant à la vitesse angulaire du lacet.

L'état initial pour les deux cas est $x(t_0) = (0, 0)$.

3.5.1.1 Résultats et discussion

Le Grammien d'atteignabilité solution de l'équation de Lyapunov ainsi que l'énergie minimale pour atteindre un état final sont calculés (3.35) et (3.43). Les histogrammes suivants illustrent l'énergie consommée $E_{\theta_i + \Delta\%}$ calculée, pour les deux cas, en fixant chaque fois tous les paramètres à leurs valeurs nominales et variant un seul paramètre θ_i de $\Delta\%$ de sa valeur nominale.

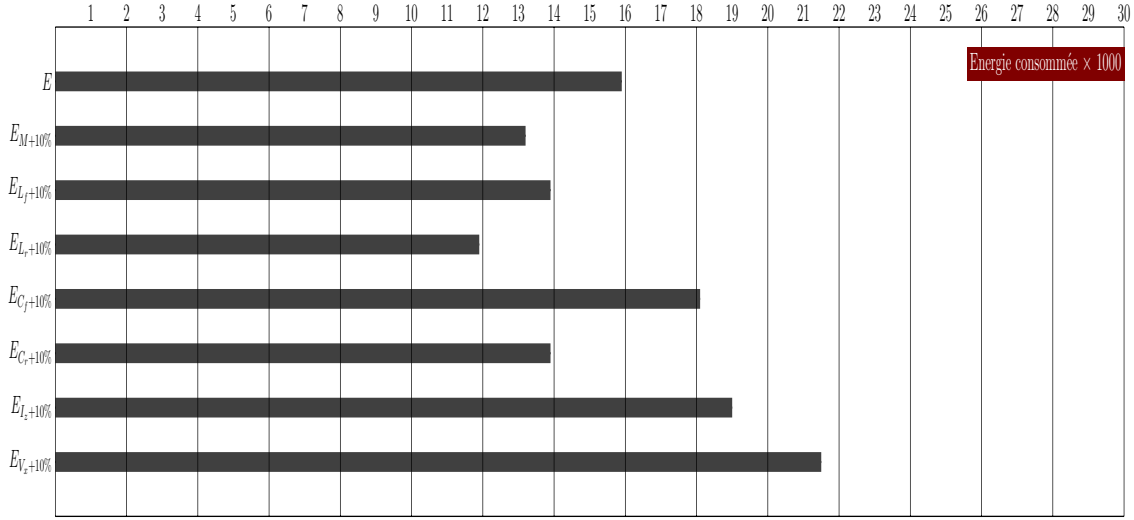


FIGURE 3.18 – Energie consommée pour atteindre l'état $x(t_f) = (1; 0, 01)$

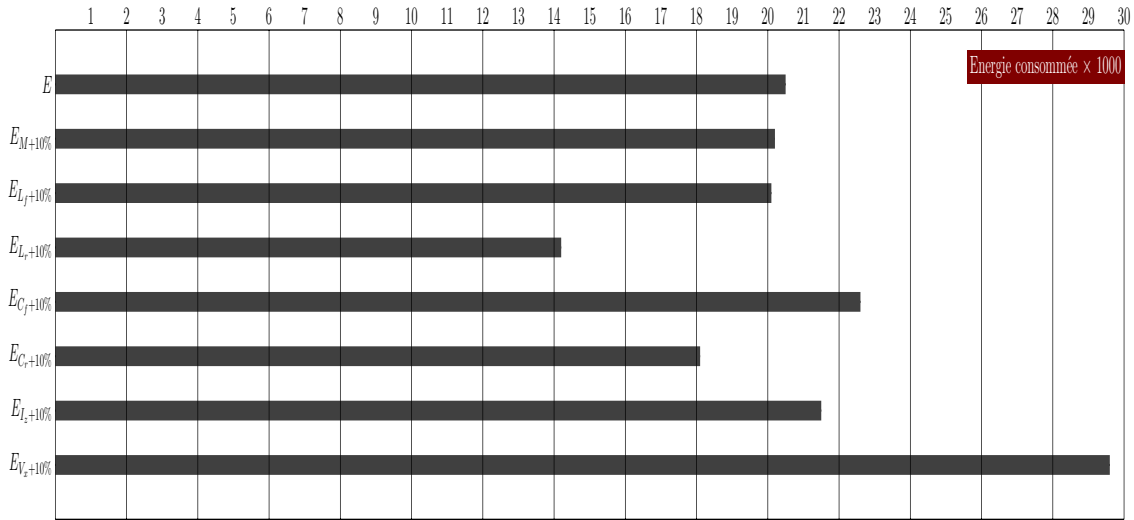


FIGURE 3.19 – Energie consommée pour atteindre l'état $x(t_f) = (0, 01; 1)$

E représente l'énergie obtenue en fixant tous les paramètres à leurs valeurs nominales (sans variation). Une variation de 10% est considérée.

Nous remarquons qu'en variant la masse M et L_f , l'énergie diminue, dans le cas où l'état final égal à $x(t_f) = (1; 0, 01)$ et leur influence est négligeable sur l'énergie dans le cas où $x(t_f) = (0, 01; 1)$. La variation de M et L_f influe sur l'état x_1 , qui correspond à la vitesse latérale, mais n'influe pas sur l'état x_2 . La variation du paramètre L_r engendre une faible énergie dans le cas où $x(t_f) = (1; 0, 01)$ ou $x(t_f) = (0, 01; 1)$, sa variation influe alors sur x_1 et x_2 . D'autre part, la variation de la vitesse longitudinale V_x entraîne une augmentation de l'énergie dans les deux cas. Le paramètre V_x est alors influent sur la vitesse latérale x_1 et la vitesse angulaire du lacet x_2 .

Les autres paramètres varient peu la valeur de l'énergie donc leur influence sur l'état est faible.

3.5.1.2 Placement optimal des paramètres pour une énergie minimale consommée

Considérons maintenant une variation des paramètres M , L_f , L_r , C_f , C_r , I_z et V_x dans les intervalles $[1200 \text{ kg}, 2000 \text{ kg}]$, $[0.6 \text{ m}, 1.4 \text{ m}]$, $[0.7 \text{ m}, 1.4 \text{ m}]$, $[-70\,000 \frac{N}{rad}, -62\,000 \frac{N}{rad}]$, $[-57\,000 \frac{N}{rad}, -51\,000 \frac{N}{rad}]$, $[1\,000 \text{ kg m}^2, 2\,000 \text{ kg m}^2]$, et $[7 \frac{m}{s}, 15 \frac{m}{s}]$. Les valeurs optimales des paramètres, solutions de l'équation (3.45), correspondant à une énergie minimale pour $x(t_f) = (1, 0.01)$ sont données dans le tableau suivant.

Paramètres optimaux
$M = 1200 \text{ kg}$
$L_f = 0,6 \text{ m}$
$L_r = 0,7 \text{ m}$
$C_f = -70\,000 \frac{N}{rad}$
$C_r = -57\,000 \frac{N}{rad}$
$I_z = 2\,000 \text{ kg m}^2$
$V_x = 15 \frac{m}{s}$

TABLE 3.4 – Valeurs optimales pour une énergie consommée minimale

3.5.2 Etude de l'influence des paramètres d'un modèle bicyclette sur la variation de l'énergie fournie en sortie

Dans cette partie, on suppose que l'état final est $x(t_f) = (0; 0)$ et on considère deux cas pour l'état initial $x(t_0) = (1; 0, 01)$ et $x(t_0) = (0, 01; 1)$.

3.5.2.1 Résultats et discussion

De la même manière, le Grammien d'observabilité et l'énergie fournie en sortie sont calculés par (3.36) et (3.44). Les histogrammes suivants illustrent l'énergie fournie en sortie pour $x(t_0) = (1; 0, 01)$ et $x(t_0) = (0, 01; 1)$. Ces énergies sont calculées en fixant chaque fois tous les paramètres à leurs valeurs nominales et en variant un seul paramètre de +10% de sa valeur nominale.

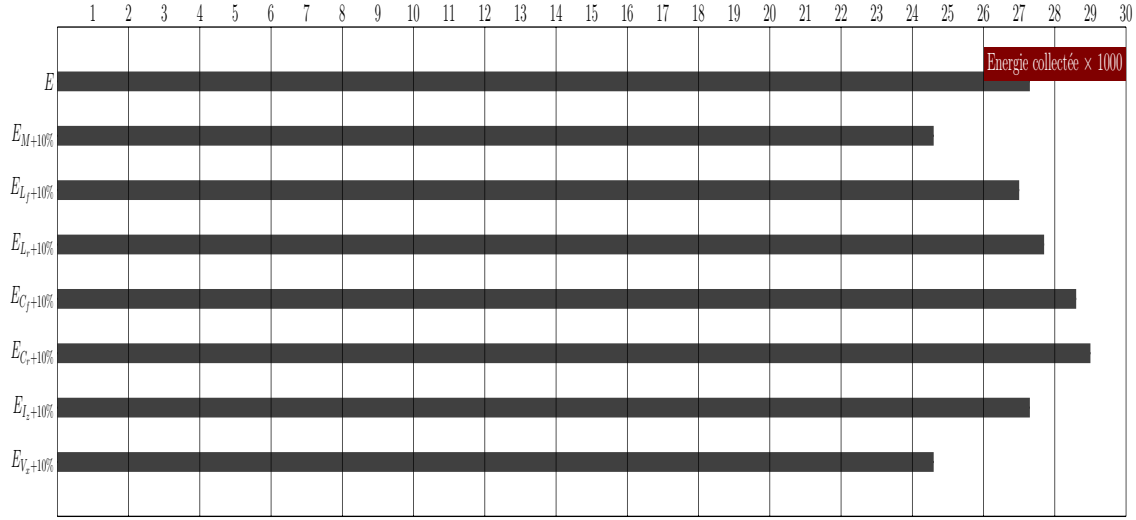


FIGURE 3.20 – Energie collectée en sortie pour $x(t_0) = (1; 0, 01)$

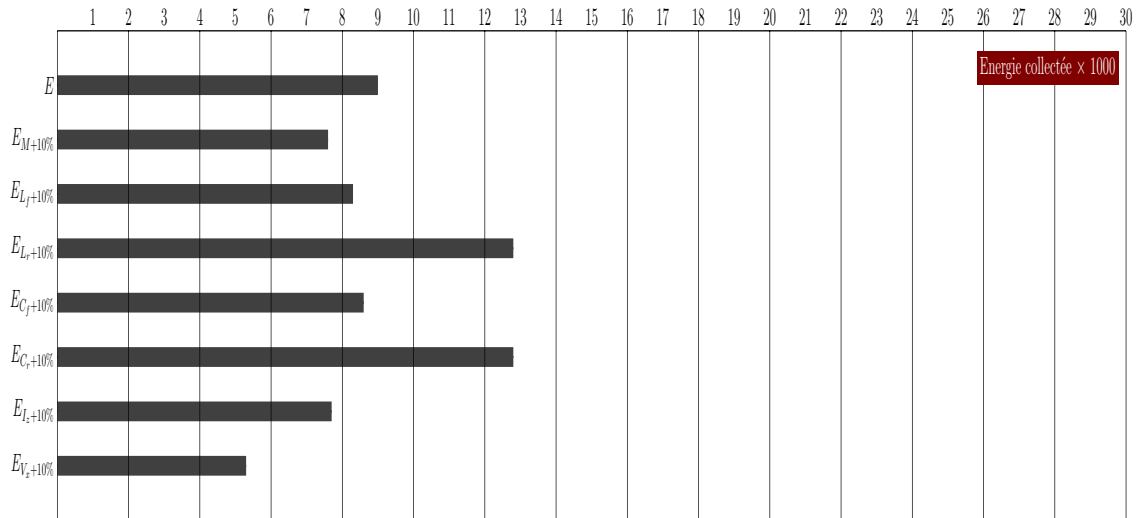


FIGURE 3.21 – Energie collectée en sortie pour $x(t_0) = (0, 01; 1)$

D'après les histogrammes, nous remarquons que la variation de la vitesse longitudinale V_x et la masse M diminuent l'énergie collectée en sortie dans les deux cas. La variation de C_r et C_f influencent la variation de l'énergie fournie pour $x(t_0) = (1; 0, 01)$. D'autre part, L_r et C_r permettent d'avoir une grande valeur d'énergie pour le cas $x(t_0) = (0; 01, 1)$.

3.5.2.2 Placement optimal des paramètres pour une énergie maximale fournie en sortie

Supposons que les paramètres varient dans les mêmes intervalles présentés dans l'exemple précédent, les valeurs optimales des paramètres, solutions de l'équation (3.48), correspondant à

une énergie maximale et un état final $x(t_0) = (1; 0, 01)$ sont données dans le tableau suivant.

Paramètres optimaux
$M = 2\,000\text{ kg}$
$L_f = 1,4\text{ m}$
$L_r = 1,4\text{ m}$
$C_f = -62\,000\frac{N}{rad}$
$C_r = -51\,000\frac{N}{rad}$
$I_z = 2\,000\text{ kg m}^2$
$V_x = 15\frac{m}{s}$

TABLE 3.5 – Valeurs optimales pour une énergie maximale collectée en sortie

3.5.2.3 Placement optimal des paramètres pour une énergie minimale consommée en entrée et une énergie maximale collectée en sortie

Les valeurs des paramètres permettant d'avoir une énergie minimale consommée et une énergie maximale collectée en sortie sont déterminées à partir de l'équation (3.51) et sont données dans le tableau suivant.

Paramètres optimaux
$M = 2\,000\text{ kg}$
$L_f = 1,17\text{ m}$
$L_r = 0,7\text{ m}$
$C_f = -70\,000\frac{N}{rad}$
$C_r = -51\,000\frac{N}{rad}$
$I_z = 2\,000\text{ kg m}^2$
$V_x = 15\frac{m}{s}$

TABLE 3.6 – Valeurs optimales pour une énergie minimale consommée en entrée et une énergie maximale collectée en sortie

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux méthodes d'analyse de sensibilité pour les modèles dynamiques. La première étudie la sensibilité de la sortie du modèle suite à la variation des paramètres autour de sa valeur nominale. La formulation d'un système des fonctions de sensibilité pour les modèles linéaires et non linéaires a été donnée. Cependant, cette méthode est locale, ce qui peut être un inconvénient dans le cas où l'intervalle d'incertitude des paramètres est large.

L'originalité de ce chapitre repose sur la deuxième méthode basée sur l'énergie. Elle utilise des concepts d'Automatique, tels que les Grammiens. La deuxième méthode consiste à déterminer les paramètres influents sur l'énergie consommée en entrée et l'énergie collectée en sortie. Il s'agit d'une approche globale tenant en compte le comportement dynamique du modèle. En outre, nous avons proposé des critères pour un placement optimal des paramètres afin d'obtenir une énergie minimale consommée et une énergie maximale collectée. Les deux méthodes ont été appliquées sur un exemple académique et sur le modèle bicyclette décrivant le comportement dynamique de véhicule.

4

Analyse de sensibilité pour le recalage d'un modèle de
pneumatique

Sommaire

4.1	Introduction	107
4.2	Problématique	107
4.3	Méthodologie	109
4.4	Recalage d'un modèle de Pacejka MF5.2	110
4.4.1	Spécification des manœuvres	110
4.4.2	Environnement de simulation	111
4.4.3	Instrumentation du véhicule en vue du recalage	112
4.4.4	Recalage de modèle de Pacejka MF5.2	115
4.5	Conclusion	123

4.1 Introduction

En industrie, l'étude de la dynamique du véhicule et de son mouvement avec son environnement passe par la simulation d'un modèle représentatif de son comportement. Pour concevoir un modèle de simulation reflétant au mieux le comportement du système, dans différentes situations, une étape dite de recalage est essentielle. En effet, souvent, on dispose d'une collection de modèles qui font intervenir un nombre assez important de paramètres. Ces paramètres sont souvent fournis uniquement pour un fonctionnement nominal. De ce fait, les modèles obtenus ne sont pas toujours représentatifs du comportement du véhicule. L'analyse de sensibilité s'avère être un outil précieux pour faciliter la procédure de recalage. En effet, l'analyse de sensibilité peut être considérée comme un outil d'aide à la décision permettant de guider l'ingénieur sur les paramètres les plus influents sur la réponse du système.

Dans ce contexte, l'objectif de ce chapitre est de montrer comment l'analyse de sensibilité peut être utilisée, en industrie, pour le recalage des modèles. Dans une première partie, nous présenterons la problématique de recalage des modèles. Dans la deuxième partie, nous décrivons la méthodologie suivie. Des essais et tests ont été menés pour récupérer des mesures afin d'étudier le comportement du pneumatique afin de recaler le modèle de référence Pacejka MF5.2. Dans la dernière partie du chapitre, nous présentons la planification des essais réalisés ainsi que les résultats obtenus.

4.2 Problématique

Dans le domaine de l'automobile, afin de pouvoir comprendre le comportement du véhicule dans différentes conditions et situations, il est nécessaire d'effectuer un nombre important d'essais. Cependant, la réalisation des essais est souvent difficile à mettre en œuvre et coûteuse en matière de temps, de matériel et de moyens humains. Pour ce faire, les concepteurs des véhicules ont souvent recours aux logiciels de simulation pour mieux comprendre, à travers un modèle, le comportement des véhicules étudiés. Le modèle utilisé dépend souvent de centaines de paramètres ce qui complique la procédure de recalage et la rend très coûteuse en temps de calcul. Une analyse de sensibilité des paramètres peut faciliter la procédure de recalage. L'analyse de sensibilité permet à l'ingénieur de décider, parmi des centaines de paramètres, sur quel paramètre jouer en priorité pour améliorer la représentativité du modèle.

Dans ce chapitre, en exploitant les résultats obtenus dans le chapitre 2, on s'intéresse au recalage d'un modèle de pneumatique qui est le modèle de Pacejka MF5.2 [11], déjà présenté dans le chapitre 2. Notons que l'étude est statique et dans la suite de ce chapitre, la notion de temps n'intervient pas.

Le modèle de Pacejka dépend d'environ 180 paramètres. Comme on a mentionné dans le cha-

pitre 2, il s'agit d'un modèle de référence en pneumatique qui permet de décrire le comportement longitudinal et latéral du pneumatique. Les résultats obtenus sur l'analyse de sensibilité présentés dans le chapitre 2, montrent que la rigidité latérale est le paramètre le plus influent sur la variation de la force latérale, pour des petites valeurs d'angle de dérive (zone linéaire). La figure (4.1) montre la variation de la force latérale en fonction de l'angle de dérive et de la rigidité latérale.

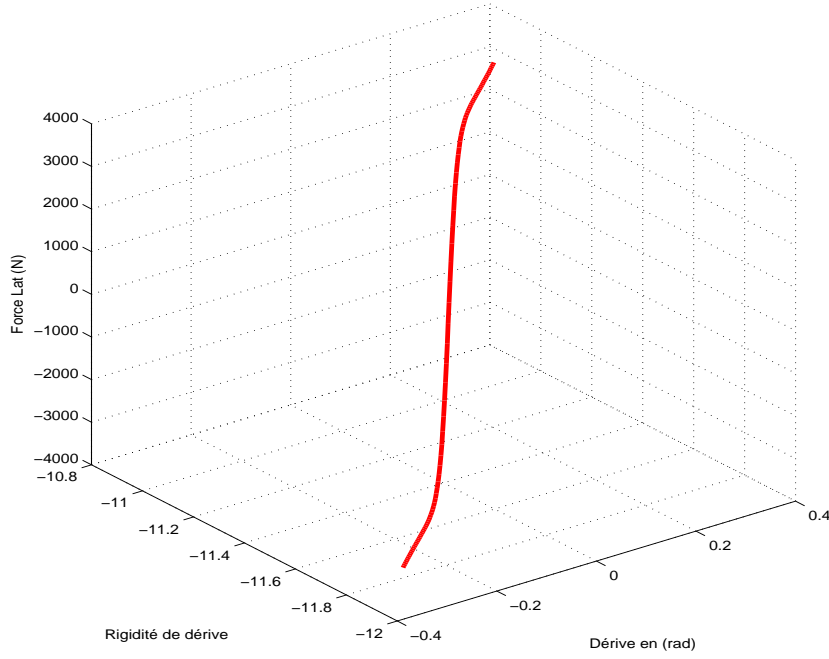


FIGURE 4.1 – Force latérale en fonction de l'angle de dérive et la rigidité latérale

La rigidité latérale K dépend des paramètres empiriques p_1 , p_2 et p_3 , de la charge verticale F_z et de l'angle de carrossage γ . Elle est donnée par :

$$K = p_1 F_z \sin(2 \arctan(\frac{F_z}{(p_2 F_{z_0})}))(1 - p_3 |\gamma|) \quad (4.1)$$

avec F_{z_0} la charge verticale nominale.

Nous avons trouvé que les paramètres p_1 et p_2 sont les plus influents sur la variation de la rigidité latérale et implicitement sur la variation de la force latérale. Il suffit alors de faire varier ces deux paramètres pour ajuster le modèle de Pacejka MF5.2. Par conséquent, on réduit le temps de calcul en réduisant le nombre de paramètres à ajuster en connaissant ces informations a priori.

Dans la suite, nous présenterons une méthodologie de recalage de modèle exploitant les résultats de l'analyse de sensibilité. Les indices de sensibilités permettent d'une part la spécification des manoeuvres à effectuer et le choix des paramètres à considérer pour le recalage.

4.3 Méthodologie

D'une manière générale, le recalage d'un modèle est la procédure d'ajustement des paramètres du modèle, dans l'objectif d'avoir un comportement similaire au système réel.

La procédure classique de recalage est résumée par la figure suivante :

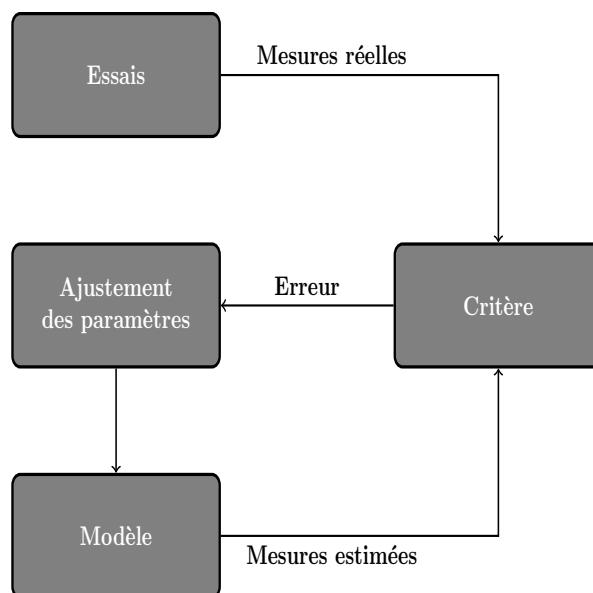


FIGURE 4.2 – Procédure de recalage des paramètres

Comme il est illustré sur la figure (4.2), on distingue trois étapes principales pour recalcr un modèle qui sont les suivantes :

- spécification du modèle à recalcr ;
- définition des essais à réaliser ;
- ajustement des paramètres.

Spécification du modèle à recalcr

Avant de procéder à l'expérimentation et à la définition des essais à faire, il est essentiel d'avoir une connaissance du modèle à recalcr : sa structure, les paramètres dont il dépend ainsi que ses sorties. Dans cette phase, le simulateur utilisé ainsi que les scénarios de trajectoire et de conduite doivent être définis. Pour une bonne représentation du modèle dans le domaine de l'automobile, la connaissance a priori des caractéristiques du véhicule utilisé (la masse, les caractéristique des pneumatiques, de la suspension,...) de la route (dimension, état,...) est essentielle.

Définition des essais à réaliser

Avant de procéder à l'expérimentation, une préparation des essais à réaliser est indispensable pour atteindre l'objectif désiré qui est la récupération des mesures exploitables. Cette étape

consiste à définir l'objectif en décrivant les essais à effectuer. Dans cette phase, il faut définir les paramètres à mesurer (par exemple les vitesses, les accélérations, l'angle de dérive, ...) ainsi que les sorties du modèle considérées (par exemple les forces, les moments...). La description des équipements, les matériels nécessaires (centrale inertielle, roue dynamométrique ...) et leur vérification sont aussi des étapes primordiales avant de réaliser les essais. En outre, il est essentiel d'assurer la connexion entre les différents équipements.

Validation et ajustement des paramètres

Cette étape se base sur une comparaison entre les mesures réelles et simulées. Pour ce faire, il est indispensable de définir des indicateurs et critères montrant la représentativité du modèle aux mesures réelles.

L'ajustement des paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés est adoptée dans cette thèse. L'objectif est de chercher l'ensemble des paramètres optimaux p qui minimise le critère d'erreur sur la sortie du système :

$$p = \arg \min(J(y_{r,i} - y_{m,i})) \quad (4.2)$$

avec $y_{m,i}$ la $i^{\text{ème}}$ réponse du modèle et $y_{r,i}$ la $i^{\text{ème}}$ mesure réelle et J l'erreur relative exprimée en % comme suit :

$$J = 100 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_{r,i} - y_{m,i})^2}{y_{m,i}^2}} \quad (4.3)$$

avec n le nombre de mesures.

Dans la partie suivante, on explique les étapes suivies pour recaler le Modèle de Pacejka MF5.2.

4.4 Recalage d'un modèle de Pacejka MF5.2

On se limite ici à recaler le modèle de Pacejka en s'intéressant uniquement au comportement latéral pur du pneumatique. Pour recaler ce modèle, et dans une première étape, des manœuvres permettant d'obtenir la courbe caractéristique de ce modèle (voir chapitre 1 paragraphe 1.2.5.4) doivent être réalisées. Nous rappelons que la courbe caractéristique pour un comportement latéral est représentée par la force latérale en fonction de l'angle de dérive. Dans une deuxième étape, on observe le comportement simulé du véhicule pour les mêmes manœuvres réalisées. Enfin, on ajuste les paramètres pour améliorer la représentativité du modèle.

Dans la suite, nous décrivons chaque étape pour recaler le modèle MF5.2.

4.4.1 Spécification des manœuvres

Il existe plusieurs manœuvres permettant d'analyser le régime permanent du comportement du véhicule soit :

- à rayon constant ;
- à vitesse constante.

On peut aussi envisager combiner un rayon constant par intervalle de vitesse. Dans notre étude, on s'intéresse à la manœuvre en régime permanent avec un rayon constant parcouru dans les deux sens (sens direct et indirect). Cette manœuvre consiste à suivre une trajectoire de type circulaire avec un rayon constant $R = 35 \text{ m}$ tout en augmentant la vitesse du véhicule. Pour avoir une variation de dérive lente, on s'assure d'avoir une augmentation de l'angle au volant ajoutée pour compenser le surbraquage soit $\Delta\theta_v < 1^\circ/s$. L'augmentation de la vitesse devrait aussi être lente et généralement la progression de vitesse est de $\Delta V_x = 1 \text{ Km/h}$ par seconde jusqu'à atteindre une vitesse limite d'environ 54 Km/h .

Les essais ont été menés sur l'autodrome de la cité de l'auto de Mulhouse (voir figure (4.3)).

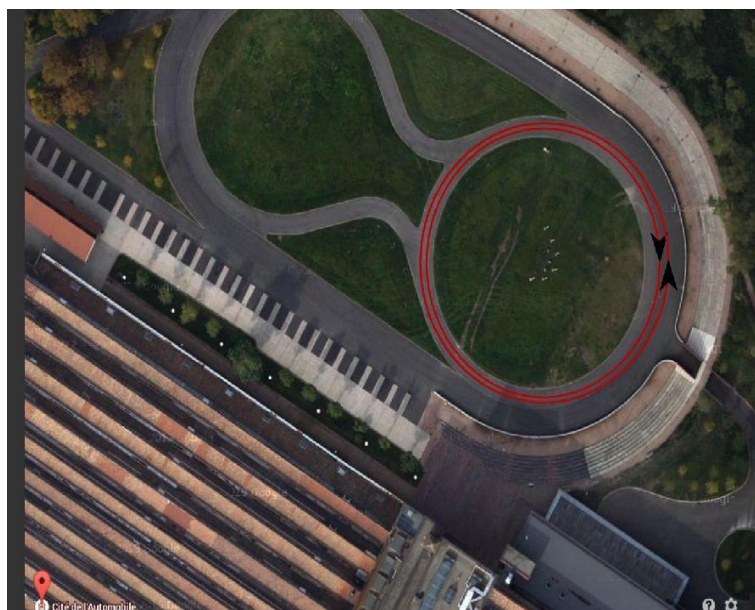


FIGURE 4.3 – Trajectoire suivie

4.4.2 Environnement de simulation

Pour le comportement dynamique du véhicule, différents logiciels ont été développés dans les secteurs académiques ou industriels tels que : TruckSim, CarSim, ASM-VDSP, Ve-DYNA, CarMaker® ...

La simulation dans cette thèse a été effectuée en utilisant le logiciel CarMaker® . Ce choix a été guidé par sa disponibilité dans le laboratoire. Ce logiciel est souvent utilisé pour tester et valider les lois de commande et algorithmes développés. Le logiciel est un environnement virtuel de véhicule et inclut différents modèles de véhicules, de la route, de pilote et de manœuvre. Les

différents sous-systèmes construisant le véhicule tels que : la suspension, les pneus, le système de freinage, peuvent être paramétrés via une interface graphique. La toolbox de ce logiciel contient des instruments indiquant l'état actuel du véhicule, un outil IPGControl qui permet de récupérer et de tracer en ligne les mesures lors de la simulation ainsi qu'un IPGMovie pour visualiser le comportement du véhicule en 3D. L'accès aux mesures est assuré par Matlab®.

CarMaker® offre un large choix de trajectoires. Afin de pouvoir recaler le modèle, la manoeuvre réalisée et ainsi simulée par CarMaker® doit être la même. Pour ce faire, il est indispensable de définir les dimensions de la piste et le coefficient de friction en observant l'état de piste (sèche, mouillée,...). La figure(4.4) présente un exemple de la trajectoire créée pour la manoeuvre réalisée.

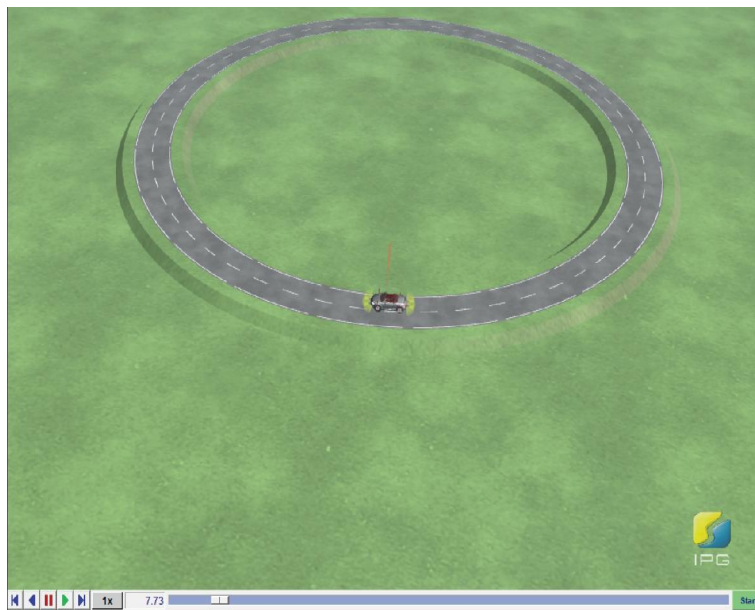


FIGURE 4.4 – Exemple de trajectoire créée sur CarMaker®

Afin d'avoir un comportement similaire à la réalité, il faut connaître les dimensions et les caractéristiques du véhicule et en particulier le pneumatique. Il est indispensable de définir la masse du véhicule et la position du centre de gravité, vu que ces paramètres influencent les transferts de la charge dans le mouvement longitudinal et transversal. D'autre part, le réglage de la suspension ainsi que la définition des caractéristiques des pneumatiques (masse, rayon...) est essentiel pour une bonne adéquation entre le comportement simulé et réel du véhicule.

4.4.3 Instrumentation du véhicule en vue du recalage

Pour réaliser les essais, il est indispensable d'instrumenter le véhicule. Dans cette partie, nous présentons les différents matériels et capteurs qui équipent le véhicule pour les campagnes de mesures.

4.4.3.1 Véhicule d'essai

Le laboratoire MIPS dispose de différents moyens d'essai pour la modélisation, l'identification, la commande et le diagnostic de systèmes embarqués dans un véhicule. Parmi ces moyens d'essai, le laboratoire dispose de véhicules instrumentés destinés à la validation des méthodes de génération de trajectoire, de lois de commande et d'algorithmes de fusion de données. Le véhicule utilisé pour assurer les essais dans cette thèse est le modèle Renault Scénic (voir figure (4.5))



FIGURE 4.5 – Véhicule d'essai

4.4.3.2 Roue dynamométrique-RoaDyn S625

La roue dynamométrique (RoaDyn) S625, développée par Kistler, est utilisée dans cette thèse (voir figure (4.6)). La RoaDyn S625 est une roue de mesure des 3 forces F_x , F_y et F_z et des 3 moments M_x , M_y et M_z exercés sur la roue. Elle se caractérise par sa légèreté qui la rend adaptée pour des petits véhicules à des vitesses élevées mais aussi par sa rigidité. Grâce à la conception modulaire de la roue, l'utilisateur est capable de changer facilement les composants et de s'adapter aux géométries de jantes de chaque véhicule. La jante de la RoaDyn S625 est en composite alliage d'aluminium / fibre carbone renforcée (CFRP) qui s'approche d'une roue normale en termes de poids.



FIGURE 4.6 – Jante de la roue dynamométrique



FIGURE 4.7 – Roue dynamométrique installée avec le pneumatique

Afin de procéder aux mesures des efforts générés au niveau de la roue, la RouDyn S625 est montée au niveau de la roue avant gauche (voir figure (4.7)). Les forces et les moments sont alors mesurés au centre de la roue.

4.4.3.3 RT-SPLIT

L'unité GPS-inertielle INS/GPS avec Split IMU (Inertial Measurement Unit) est utilisée (voir figure(4.8)). Elle est proposée par Oxford Technical Solutions et inclut une centrale inertielle et un récepteur GPS. L'unité permet de mesurer les vitesses et accélérations longitudinales, latérales et verticales du véhicule ainsi que les vitesses de lacet, de tangage et de roulis.

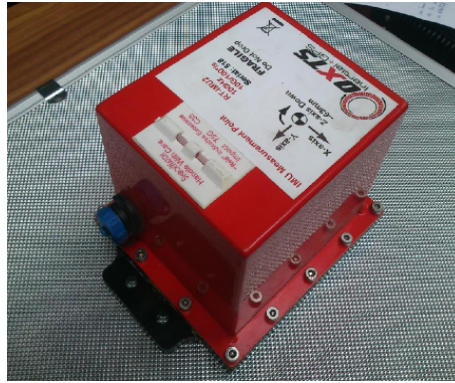


FIGURE 4.8 – Centrale inertielle avec Split IMU



FIGURE 4.9 – Centrale inertielle installée

Vu que ce n'est pas possible de placer la centrale inertielle sur la RoaDyn, elle est placée au centre roue avant droite (voir figure (4.9)). Un dispositif mécanique a été construit afin de maintenir l'antenne GPS sur la centrale.

4.4.3.4 Acquisition des mesures

Afin de procéder à l'acquisition, le véhicule est équipé d'ordinateurs permettant l'acquisition des mesures via le logiciel (Real Time Multisensor Advanced Prototyping Software). Ce logiciel est un outil de prototypage et de développement des applications technologiques. Il permet de d'acquérir, d'enregistrer, de traiter et de transmettre les données en temps réel, à travers une interface graphique.

4.4.4 Recalage de modèle de Pacejka MF5.2

La procédure de recalage du modèle MF5.2 peut être illustrée par la figure suivante.

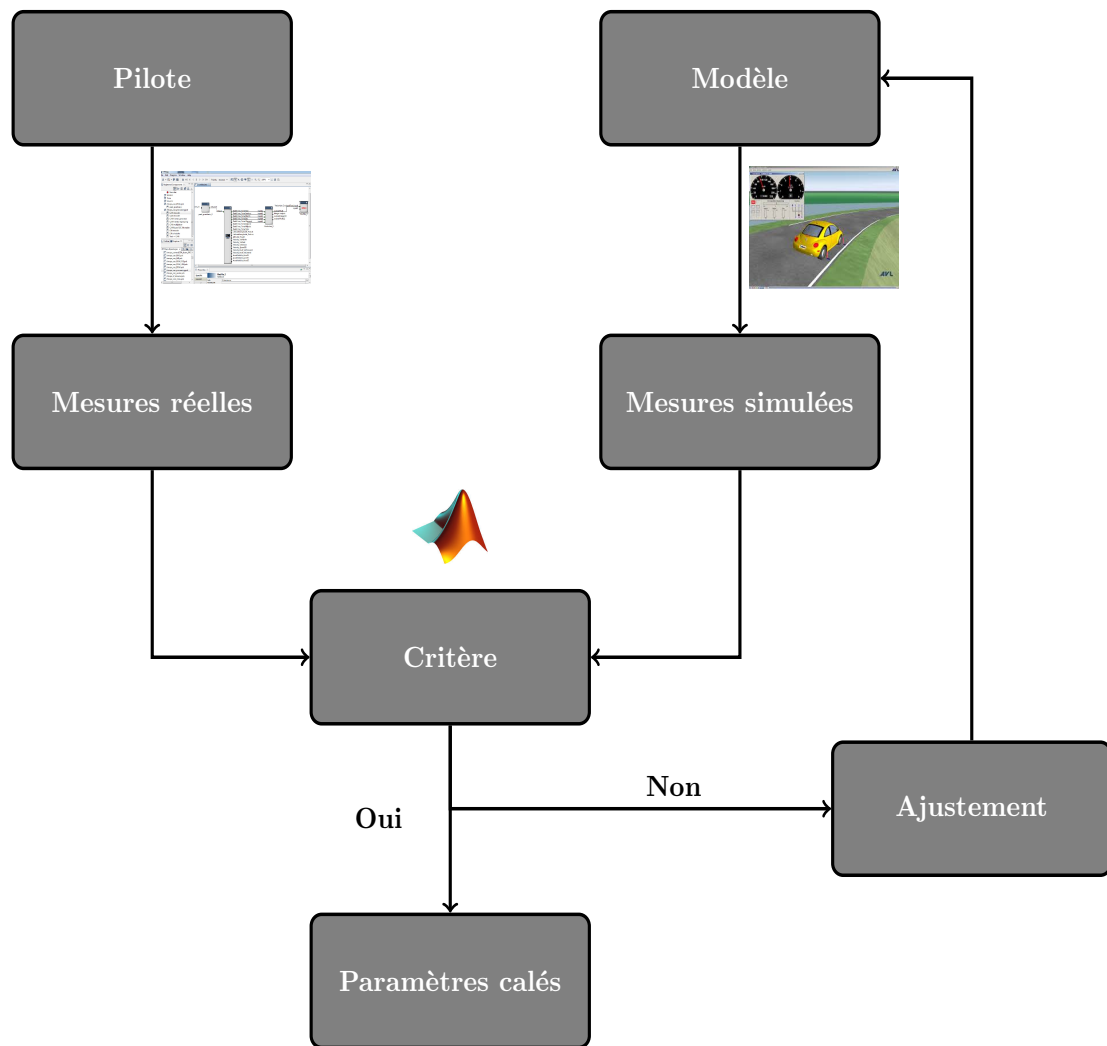


FIGURE 4.10 – Cycle de recalage de modèle de Pacejka MF5.2

La procédure d'ajustement suivie est hors ligne. Une fois les essais réalisés et la simulation faite, on vérifie si le critère est satisfait ou pas. Si ce n'est pas le cas, on ajuste le modèle en variant les valeurs de p_1 et p_2 intervenant dans l'expression de la rigidité latérale. Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter les résultats obtenus.

4.4.4.1 Recalage dans le sens direct

Les résultats obtenus dans ce paragraphe correspondent à une augmentation de vitesse en virage jusqu'à atteindre 54 Km/h en sens direct.

Sur la figure (4.11), nous présentons l'évolution de la force latérale et de l'angle de dérive qui correspondent à cette manœuvre.

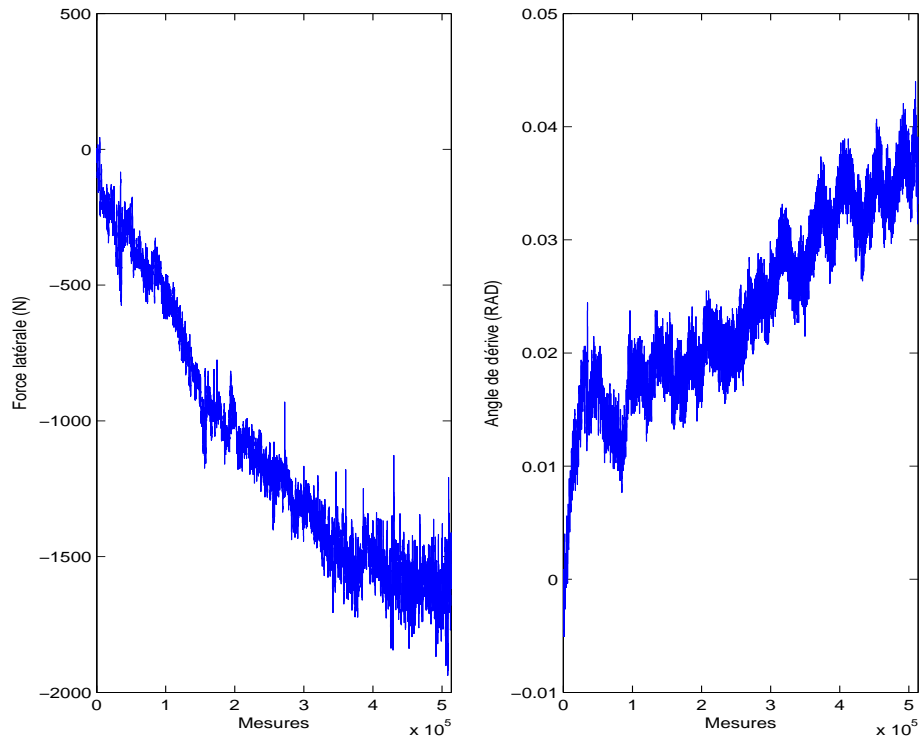


FIGURE 4.11 – Force latérale et angle de dérive

A partir de la figure (4.11), on peut constater que la force latérale et l'angle de dérive sont inversement proportionnels. La figure (4.12) présente l'allure de la courbe de la force latérale en fonction de l'angle de dérive mesuré ainsi que celle obtenue par simulation. Afin de pouvoir observer l'écart entre les deux courbes, on a opté pour une approximation polynomiale d'ordre 1 des deux courbes.

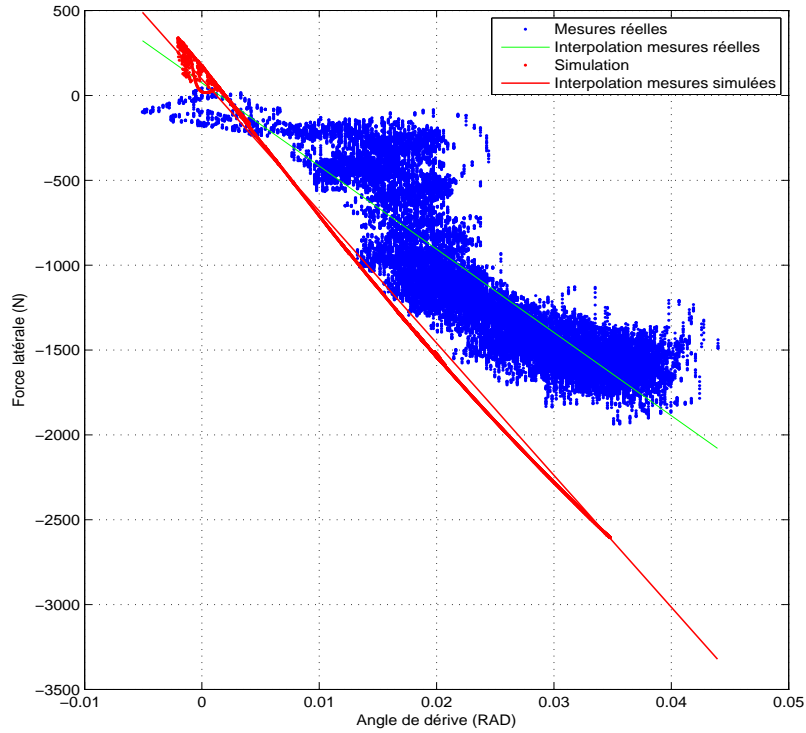


FIGURE 4.12 – Force latérale en fonction de l'angle de dérive

Le nuage de points (en bleu sur la figure (4.12)) correspond à la mesure et la courbe continue (en vert sur la figure (4.12)) à l'interpolation polynomiale de ce nuage de points. La figure (4.12) montre clairement l'inadéquation du modèle à décrire le comportement latéral du pneumatique. Après l'ajustement des paramètres du modèle, en variant uniquement p_1 et p_2 , la force latérale mesurée en fonction de l'angle de dérive et celle simulée sont représentées sur (4.13).

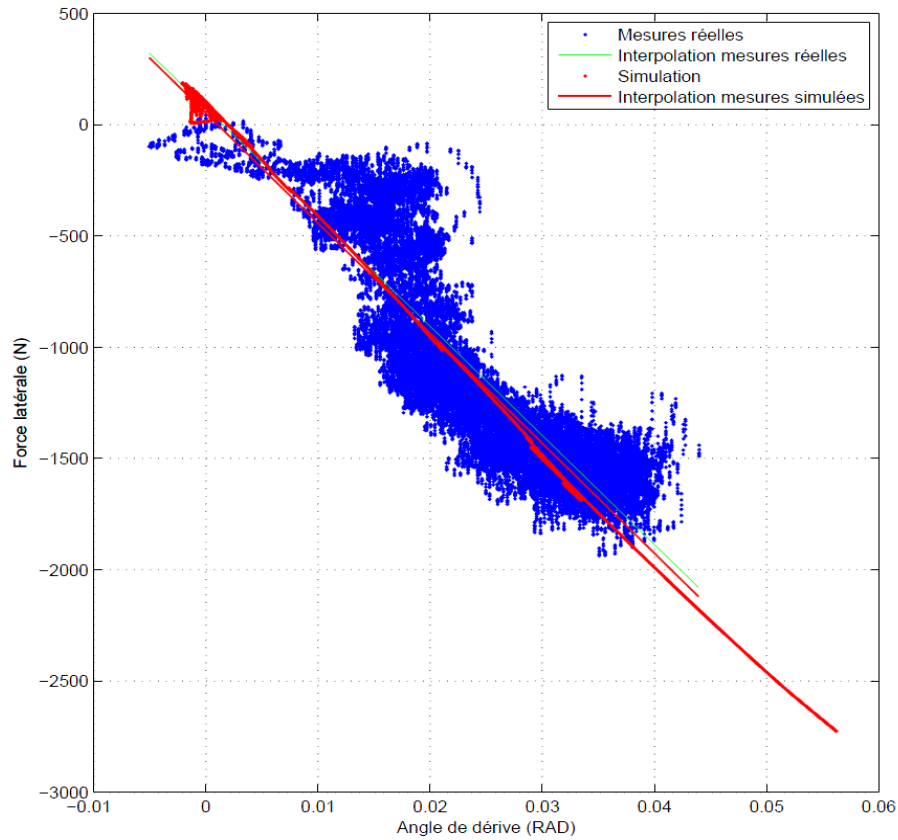


FIGURE 4.13 – Force latérale en fonction de l'angle de dérive après ajustement des paramètres

Les paramètres optimaux permettant d'avoir une erreur minimale entre la courbe approchée des mesures réelles et la courbe simulée sont donnés dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur initiale	Valeur recalée
p_1	-32	-20
p_2	2.4	3
Erreur en %	60	2.77

TABLE 4.1 – Résultats de validation

La simulation nous a permis de vérifier la représentativité du comportement latéral du modèle MF5.2 vis à vis du comportement réel. D'après la figure (4.13) et le tableau (4.1), nous observons une bonne corrélation simulation/mesure décrivant le comportement latéral du pneumatique. Les résultats obtenus présentent une faible erreur, 2.77% entre la courbe approchée des mesures réelles et la courbe simulée.

4.4.4.2 Recalage d'un modèle de Pacejka complet

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à recalibrer le modèle de Pacejka décrivant le comportement latéral complet du pneumatique, c'est-à-dire en exploitant des valeurs positives et négatives de la force latérale. Vu qu'on ne dispose pas des mesures réelles décrivant cette manœuvre, les mesures de la force latérale et de l'angle de dérive obtenues en suivant une trajectoire circulaire dans le sens direct ont été combinées avec celles obtenues en suivant une trajectoire circulaire dans le sens indirect.

Cette manœuvre a été réalisée en créant la trajectoire suivante sur CarMaker® :

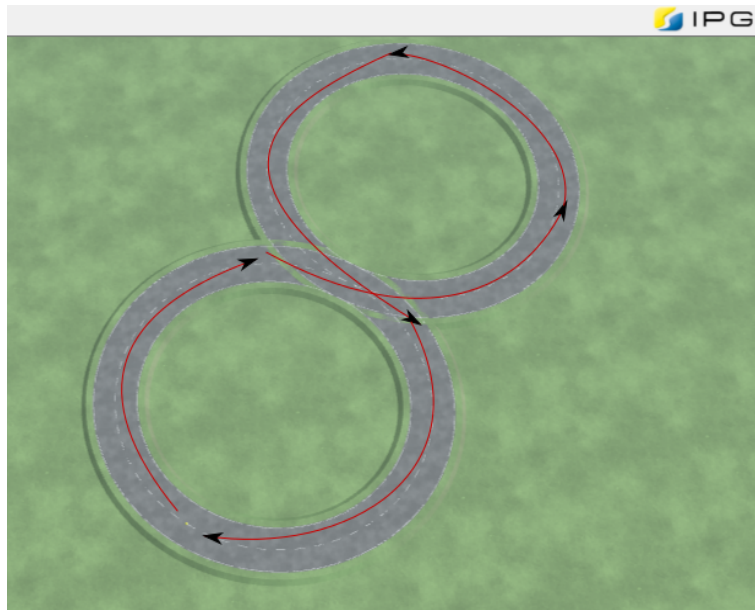


FIGURE 4.14 – Trajectoire réalisée sur CarMaker®

L'évaluation de la force latérale et de l'angle de dérive dans le sens indirect est donnée sur la figure 4.15. Ces mesures ont été rassemblées avec les mesures précédemment présentées pour construire la courbe représentative du comportement latéral complet du pneumatique.

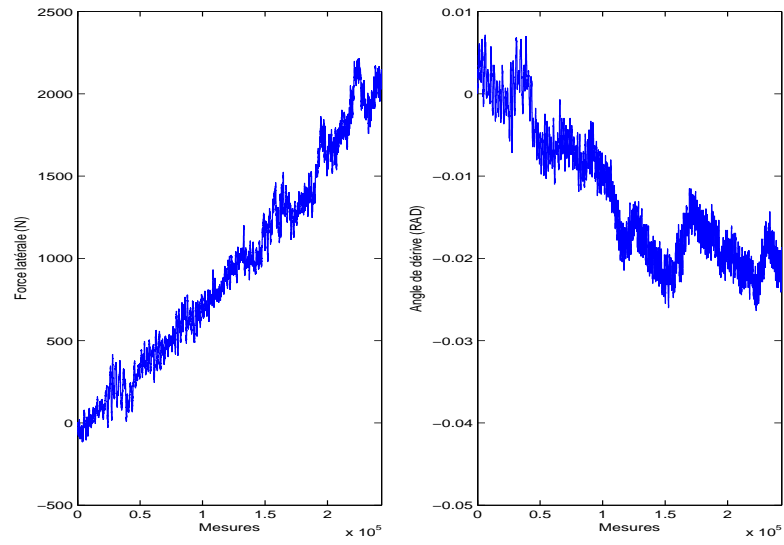


FIGURE 4.15 – Force latérale et angle de dérive

La figure (4.16) illustre la force latérale mesurées en fonction de l'angle de dérive ainsi que celle obtenue par simulation.

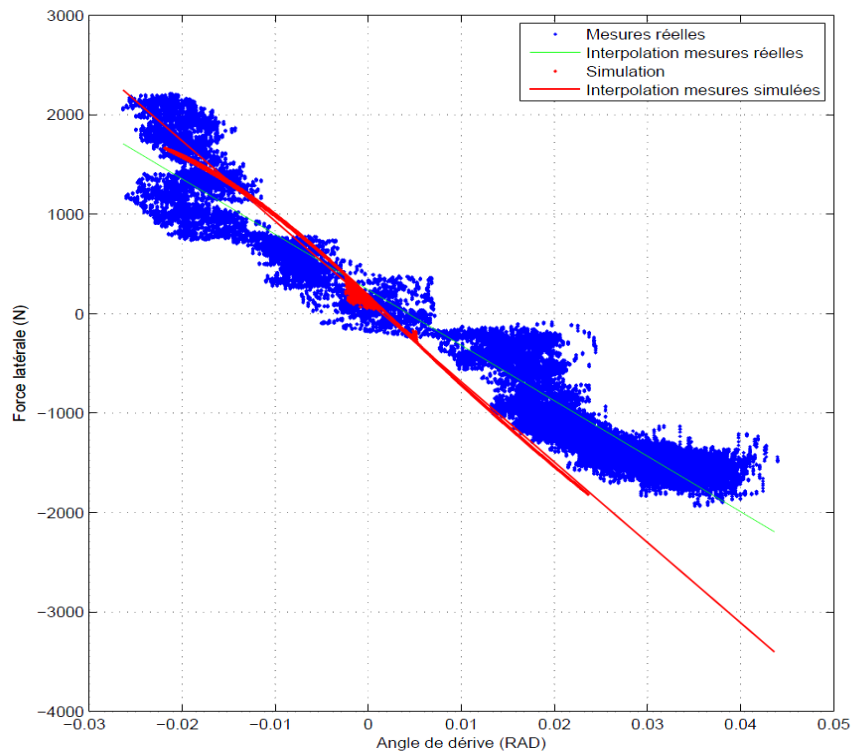


FIGURE 4.16 – Force latérale en fonction de l'angle de dérive

La procédure de recalage est la même que précédemment. La force latérale mesurée en fonction de l'angle de dérive ainsi que celle obtenue par simulation après recalage sont données par la figure (4.17).

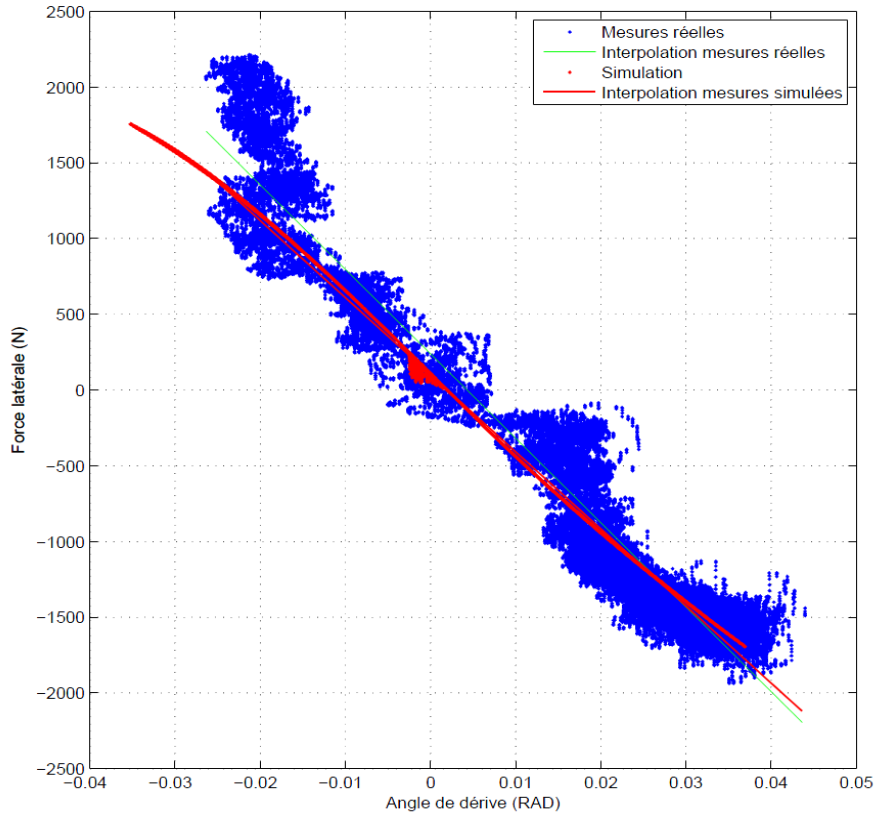


FIGURE 4.17 – Force latérale en fonction de l'angle de dérive après recalage

Le tableau suivant présente les résultats de validation du modèle :

Paramètre	Valeur initiale	Valeur recalée
p_1	-32	-20
p_2	2.4	1.8
Erreur en %	52	11

TABLE 4.2 – Résultats de validation

D'après la figure (4.17) et le tableau (4.2), on constate qu'on obtient une nette amélioration de représentation du modèle aux mesures réelles. L'erreur relative entre la courbe approximée des mesures réelles et la courbe simulée est de 11%.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploité les résultats d'analyse de sensibilité des paramètres du modèle de Pacejka, obtenus dans le chapitre 2, pour le recalage du modèle. En effet, à travers l'analyse de sensibilité, on peut avoir une connaissance a priori des paramètres à varier pour ajuster le modèle aux mesures expérimentales. La procédure de recalage présentée a permis d'aboutir à des résultats concluants en matière de représentativité du modèle de Pacejka MF5.2 simulé par CarMaker[®] aux mesures expérimentales.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Les travaux présentés dans ce manuscrit portent sur l'analyse de sensibilité des systèmes complexes, appliquée au domaine de l'automobile. On s'intéresse à la modélisation de l'interface pneu/sol. Ces modèles impliquent des paramètres incertains dus au manque de mesures qui sont coûteuses à réaliser, au manque de données constructeur souvent considérées confidentielles, ... Ces incertitudes sont propagées à travers le modèle et se retrouvent sur la sortie (force latérale, force longitudinale, moments, ...). Il est alors essentiel de déterminer les paramètres qui contribuent le plus à l'incertitude sur la sortie, grâce à une analyse de sensibilité. Cependant, dans le domaine automobile, les paramètres sont souvent corrélés, comme par exemple la charge verticale et la rigidité latérale. De plus, les paramètres suivent des distributions arbitraires.

Une première contribution de cette thèse a été de proposer une méthode d'analyse de sensibilité dans le cas de paramètres dépendants et suivant une distribution arbitraire. L'approche consiste à décorrélérer les paramètres puis à construire une base orthonormale à partir des moments non centrés des paramètres. Les indices de sensibilité peuvent ainsi être obtenus à partir des coefficients de cette base. L'approche proposée permet de séparer la contribution d'un paramètre en deux parties, une due à sa corrélation avec les autres paramètres et l'autre due à sa non corrélation. L'approche est proposée pour des modèles statiques. Cependant, le comportement du véhicule évolue au cours du temps. Par conséquent, il y a un besoin d'outils d'analyse de sensibilité de modèles dynamiques. La deuxième contribution de cette thèse a été de proposer une approche originale d'analyse de sensibilité basée sur la variation d'énergie consommée en entrée et restituée en sortie du système. Cette approche utilise de manière originale des concepts de l'automatique, les Grammiens d'atteignabilité et d'observabilité, pour déterminer les paramètres influents. L'avantage de cette approche est qu'elle tient compte du comportement dynamique du système et est donc globale. De plus, elle ne nécessite pas le calcul d'indices de sensibilité à chaque instant, comme cela est souvent effectué. Elle permet aussi un placement optimal des paramètres. Enfin, la troisième contribution de la thèse est d'utiliser l'analyse de sensibilité comme un outil d'aide au recalage de modèles. Cela a été appliqué à un modèle de pneumatique. Pour cela, des essais ont été menés. En se basant sur les résultats obtenus dans le chapitre 2, l'analyse

de sensibilité a permis de faciliter la procédure de recalage en offrant des informations sur les paramètres à varier.

Perspectives

A l'issue de ce travail, plusieurs perspectives peuvent être envisagées.

- la méthode d'analyse de sensibilité présentée pour les modèles à paramètres dépendants se base sur les polynômes du chaos. Cependant, le nombre de simulations nécessaires pour une bonne approximation dépend du nombre de paramètres ainsi que de qualité d'approximation souhaitée. Cette approche peut alors devenir coûteuse en temps de calcul dans le cas où le modèle dépend d'un nombre très important de paramètres. Il est intéressant de trouver une solution pour rendre cette approche efficace dans le cas des modèles à grande dimension.
- la méthode d'analyse de sensibilité dynamique basée sur la dérivée partielle ne fournit que des indices de sensibilité quantifiant les paramètres seuls. Il semblerait intéressant de développer la méthode pour avoir des indices quantifiant l'interaction des paramètres.
- on s'est limité dans cette thèse au calage d'un modèle statique représentant le comportement latéral du pneu. Le calage longitudinal ou couplé peut être envisagé. La prochaine étape serait de recalibrer un modèle décrivant la dynamique du véhicule.

Caractéristiques statistiques des paramètres

Les paramètres du modèle qui sont considérés comme incertains sont représentés par des variables aléatoires, caractérisées par leurs moments statistiques. Ces paramètres peuvent être indépendants, linéairement dépendants ou non linéairement dépendants. Ils peuvent suivre une distribution connue ou bien arbitraire. Le but de cette partie est de définir des notions statistiques caractérisant les paramètres, qui seront utiles pour la suite.

Nous supposons que nous disposons de N observations (x_i, y_i) avec $i = (1, \dots, N)$ issues de la distribution de deux variables (X, Y) . Par exemple, x_i représente un paramètre du modèle et y_i la force latérale.

Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une grandeur mathématique sous forme d'un nombre entier ou un nombre réel. Elle est définie particulièrement par sa densité de probabilité.

Lois des probabilités

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ses valeurs. Cette expression s'appelle la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de la variable aléatoire. Le tableau ci-dessous illustre quelques distributions usuelles des variables aléatoires.

Nom	Support	Densité $f_X(x)$	Espérance	Variance
Loi uniforme $U[a, b]$	$[a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi normale	\mathbb{R}	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2
Loi gamma	\mathbb{R}^+	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Loi exponentielle	\mathbb{R}^+	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

TABLE 3 – Lois de probabilités usuelles

Les moments statistiques caractérisant la variable aléatoire peuvent être calculés à partir de cette

densité de probabilité. Supposons que f est la densité de probabilité de la variable.

- L'espérance de X notée $E(X)$ est

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

- La variance de X notée $V(X)$ est

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$$

- L'écart-type de X noté σ_X est défini comme suit :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Dépendance entre deux variables

Une variable dépendante est une variable dont la valeur est influencée ou déterminée par les valeurs d'une ou plusieurs variables. Ainsi, si la variable change, les autres variables liées à elle changent aussi. Et inversement, deux variables sont dites indépendantes si le changement de l'une n'affecte pas le changement de l'autre.

Deux variables indépendantes sont caractérisées par les propriétés suivantes :

- Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

- Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Cependant les relations réciproques ne sont pas vraies.

Le but du paragraphe suivant est de proposer des outils permettant de mesurer la dépendance des paramètres. Ces outils s'appellent indicateurs de liaison ou coefficients de corrélation. Ils mesurent le degré de liaison entre deux variables. Ces indicateurs sont normés et varient entre -1 et 1 . La valeur 1 indique une forte dépendance positive, la valeur 0 indique que les variables ne sont pas corrélées et la valeur -1 indique que les variables sont fortement liées par une fonction négative.

- *Le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson [75]*

Ce coefficient mesure la dépendance linéaire entre deux variables.

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4)$$

où σ_X et σ_Y sont respectivement les écarts type de X et Y . $Cov(X, Y)$ est la covariance et donnée par :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (5)$$

Remarque : si $\rho(X, Y)$ est nul cela n'indique pas l'absence d'une dépendance des variables et n'exclut pas une dépendance non linéaire.

Pour surmonter cette limite, il est plus raisonnable de s'intéresser aux rangs des observations.

- *Le coefficient de corrélation de rang de Spearman [76]*

Ce coefficient indique la présence d'une relation entre le rang des observations pour deux variables X et Y . Ce coefficient est non paramétrique car il ne fait aucune supposition sur la distribution sous-jacente. En plus, il permet de déterminer les relations non linéaires monotones existantes entre ces deux variables.

$$\rho(X, Y) = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^N |r(x_i) - r(y_i)|}{N^3 - N} \quad (6)$$

avec $r(x_i)$ est le rang de x_i dans la distribution x_1, \dots, x_N et $r(y_i)$ est le rang de y_i dans la distribution y_1, \dots, y_N . Lorsque la liaison est non monotone, le coefficient de Spearman n'est pas efficace.

Bibliographie

- [1] Ministère de l'intérieur. Bilan de l'accidentalité de l'année 2012. Technical report, Observatoire National Interministériel de la Sécurité Routière, 2012.
- [2] J.P. Brossard. *Dynamique du véhicule : modélisation des systèmes complexes*. PPUR presses polytechniques, 2006.
- [3] J.R. Ellis. *Vehicle Handling Dynamics*. Mechanical Engineering Publications, 1994.
- [4] H. Sleiman. *Systèmes de suspension semi-active à base de fluide magnétorhéologique pour l'automobile*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2010.
- [5] H.B. Pacejka. *Tyre and vehicle dynamics*. Elsevier, 2002.
- [6] H. Dugoff, P.S. Sancher, and L. Segel. Tire performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control inputs. Technical report, Highway Safety Research Institute, Institute of Science and Technology, University of Michigan, 1969.
- [7] U. Kiencke and L. Nielsen. *Automotive Control Systems : For Engine, Driveline, and Vehicle*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [8] M. Hiemer. *Model Based Detection and Reconstruction of Road Traffic Accidents*. Univ.-Verlag Karlsruhe, 2004.
- [9] M.G. Bekker. *Introduction to terrain-vehicle systems*. University of Michigan Press, 1969.
- [10] A. Ciocan. *Contribution à l'analyse et à la commande du véhicule automobile*. PhD thesis, Université de Picardie Jules Verne-Amiens, 2005.
- [11] E. Bakker, L. Nyborg, and H. Pacejka. Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies. *SAE Transaction*, 1987.
- [12] R.E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *SIAM Journal of Control and optimization*, 1 :152–192, 1963.

- [13] M. L. J. Hautus. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. *Indag. Math.*, 31 :443–448, 1969.
- [14] S.L. Chang and T. Peng. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(4) :474–483, 1972.
- [15] J. Biannic. Commande robuste des systèmes à paramètres variables : application en aéronautique. Technical report, 1996.
- [16] J. Bernussou, J. Geromel, and P. Peres. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, 13(4) :56–72, 1989.
- [17] M. Rousseau. *Propagation d’incertitudes et analyse de sensibilité pour la modélisation de l’infiltration et de l’érosion*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2012.
- [18] A. Saltelli, K. Chan, and E.M. Scott. *Sensitivity Analysis*. Wiley paperback series. Wiley, 2000.
- [19] H.C. Frey and S.R. Patil. Identification and review of sensitivity analysis methods. *Risk Analysis*, 22(3), 2002.
- [20] D.K.J Lin. A new class of supersaturated design. *Technometrics*, 35 :28–31, 1993.
- [21] M. Claeys-Bruno, M. Dobrijevic, R. Cela, R. Phan-Tan-Luu, and M. Sergent. Supersaturated design : construction, comparison and interpretation. In *Colloquium chemiometricum Mediterraeneum*, 2007.
- [22] M.D. Morris. Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 33(2) :161–174, 1991.
- [23] S. Da-Veiga. *Analyse d’incertitudes et de sensibilité. Application aux modèles de cinétique chimique*. PhD thesis, Université Toulouse Paul Sabatier, 2007.
- [24] A. Saltelli, K. Chan, and E. M. Scott. *Sensitivity Analysis*. Wiley Series in probability and statistics, 2004.
- [25] G.D. Garson. Interpreting neural-network connection weights. *AI Expert*, 6(4) :46–51, 1991.
- [26] M. Gevrey, I. Dimopoulos, and S. Lek. Two-way interaction of input variables in the sensitivity analysis of neural network models. *Ecological Modelling*, 195(1) :43–50, 2006.
- [27] J.D. Olden, M.K. Joy, and R.G Death. An accurate comparison of methods for quantifying variable importance in artificial neural networks using simulated data. *Ecological Modelling*, 178(3) :389–397, 2004.

-
- [28] J.M. Zurada, A. Malinowski, and I. Cloete. Sensitivity analysis for minimization of input data dimension for feedforward neural network. *Proceedings IEEE International Symposium on Circuits and Systems, IEEE*, pages 447–450, 1994.
- [29] C.M. Bishop. *Neural networks for pattern recognition*. Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [30] T. Tchaban, M.J Taylor, and J.P. Griffin. Establishing impacts of the inputs in a feedforward neural network. *Neural Computing and Applications*, 1998.
- [31] I. Sobol. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, 1 :407–414, 1993.
- [32] C. Robert and G. Casella. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, 1999.
- [33] M.D. McKay. Evaluating prediction uncertainty. Technical report nureg/cr-6311, US Nuclear Regulatory Commission and Los Alamos National Laboratory, 1995.
- [34] R. I. Cukier, C. M. Fortuin, K. E. Shuler, A. G. Petschek, and J. H. Schaibly. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. The theory. *The Journal of Chemical Physics*, 59(8) :3873–3878, 1973.
- [35] R.I. Cukier. Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems. *Journal of Computational Physics*, 26 :1–42, 1978.
- [36] B Iooss. Revue sur l’analyse de sensibilité globale de modèles numériques. *Journal de la Société Française de Statistique*, 152(1), 2011.
- [37] T. Ishigami and T. Homma. An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models. *Uncertainty Modeling and Analysis, 1990. Proceedings., First International Symposium on*, pages 398 – 403, 1990.
- [38] R.L. Iman and W.J. Conover. A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 11 (3) :311–334, 1982.
- [39] T. Bedford. Sensitivity indices for (tree)-dependant variables. In *International Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output*, Venise (Italie), 1998.
- [40] J. Jacques. *Contribution à l’analyse de sensibilité et l’analyse discriminante généralisée*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, 2005.

- [41] B.S. RamaRao, S. Mishra, S.D. Sevougian, and R.W. Andrews. Uncertainty importance of correlated variables in the probabilistic performance assessment of a nuclear waste repository. In *Second International Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output*, pages 215–218, Venice (Italie), 1998.
- [42] A. Saltelli and S. Tarantola. On the relative importance of input factors in mathematical models : Safety assessment for nuclear waste disposal. *Journal of the American Statistical Association*, 97(459) :702–709, 2002.
- [43] C. Xu and G.Z. Gertner. Uncertainty and sensitivity analysis for models with correlated parameters. *Reliability Engineering & System Safety*, 93 :1563–1573, 2008.
- [44] H. Rabitz. Global sensitivity analysis for systems with independent and / or correlated inputs. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(6) :7587–7589, 2010.
- [45] T. A. Mara and S. Tarantola. Variance-based sensitivity indices for models with dependent inputs. *Reliability Engineering & System Safety*, 107 :115–121, 2012.
- [46] G. Chastaing, F. Gamboa, and C. Prieur. Generalized Hoeffding-Sobol decomposition for dependent variables - application to sensitivity analysis. *Electronic Journal of Statistics*, 6 : 2420–2448, 2012.
- [47] W. Hoeffding. A class of statistics with asymptotically normal distribution. *Ann. Math. Statist.*, 19(3) :293–325, 1948.
- [48] M.D. McKay, J.D. Morrison, and S.C. Upton. Evaluating prediction uncertainty in simulation models. *Computer Physics Communications*, 117 :44–51, 1999.
- [49] N. Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4) :897–936, 1938.
- [50] G. Blatman. *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. PhD thesis, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2009.
- [51] M. Baudin and J.M. Martinez. Polynômes du chaos sous Scilab via la librairie NISP. *Computer Physics Communications*, 2010.
- [52] G. Chastaing. *Indices de Sobol généralisés pour variables dépendantes*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2013.
- [53] J. Boutahar. *Méthodes de réduction et de propagation d’incertitudes : application à un modèle de chimie-transport pour la modélisation et la simulation des impacts*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2004.

-
- [54] D. Xiu and G. Karniadakis. The wiener-askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2) :619–644, 2002.
- [55] D. Xiu, D. Lucor, C.H. Su, and G. Karniadakis. Performance evaluation of generalized polynomial chaos. *Int. Conf. Comput. Science*, 2660 :346–354, 2003.
- [56] D. Lucor and G. Karniadakis. Adaptive generalized polynomial chaos for nonlinear random oscillators. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(2) :720–735, 2004.
- [57] M. Abramowitz and I Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 1964.
- [58] B. Sudret. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansion. *Reliability engineering & system safety*, 93(7) :964–979, 2008.
- [59] S. Glantz and B. Slinker. *Primer of Applied Regression & Analysis of Variance*. McGraw-Hill Education, 2000.
- [60] S. Oladyshkin and W. Nowak. Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion. *Reliability Engineering & System Safety*, 106 :179–190, 2012.
- [61] C.D. Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*. 2000.
- [62] J.A.S. Witteveen and H. Bijl. Modeling arbitrary uncertainties using Gram-Schmidt polynomial chaos. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit Reno*, 117(AIAA-2006-0896), 2006.
- [63] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, 1965.
- [64] H. Pacejka. *Tire and vehicle dynamics*. Elsevier Ltd, 2002.
- [65] E. Haro Sandoval, F. Anstett-Collin, and M. Basset. Sensitivity study of dynamic systems with polynomial chaos. *Reliability Engineering & System Safety*, 104 :15–26, 2012.
- [66] S. Dobre, T. Bastogne, M. Barberi-Heyob, F. Guillemin, and A. Richard. Conception assistée par une analyse de sensibilité globale d’une plate-forme dédiée à la recherche en thérapie photodynamique. *Journal de la société Française de Statistique*, 152(1) :72–88, 2011.
- [67] K. Campbell, M.D. McKay, and B.J. Williams. Sensitivity analysis when model outputs are functions. *Reliability Engineering and System Safety*, 91 :1468–1472, 2006.
- [68] M. Lamboni. *Analyse de Sensibilité pour les modèles dynamiques utilisées en agronomie et environnement*. PhD thesis, Université Paris Descartes, 2009.

- [69] O. Derbel. *Développements et réduction de modèles microscopiques pour la simulation de trafic et la validation macroscopique de systèmes d'automatisation basses vitesses*. PhD thesis, Université de Haute-Alsace, 2014.
- [70] C. Niesner. *Sensibilité et robustesse à l'incertitude paramétrique, une approche bond graph*. PhD thesis, Université des sciences technologiques de Lille, 2005.
- [71] I.M. Sobol and S. Kucherenko. Derivative based global sensitivity measures and their link with global sensitivity indices. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79 :3009–3017, 2009.
- [72] M.A. Wicks and R.A. DeCarlo. Gramian assignment based on the Lyapunov equation. *on Automatic Control, IEEE Transactions*, 35(4) :465–468.
- [73] B. Marx, D. Koenig, and D. Georges. Optimal sensor/actuator location for descriptor systems using Lyapunov-like equations. In *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*, volume 4, pages 4541–4542, 2002.
- [74] B. Marx. *Contribution à la Commande et au Diagnostic des Systèmes Algébro-Différentiels Linéaires*. PhD thesis, Institut national Polytechnique de Grenoble, 2003.
- [75] K. Pearson. Mathematical contributions to the theory of evolution. On a form of spurious correlation which may arise when indices are used in the measurement of organs. *Proceedings of the Royal Society of London*, 60(359-367) :489–498, 1896.
- [76] W.H. Kruskal. Ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, 53(284) :814–861, 1958.
- [77] N. Aouini. *Commande Robuste des systèmes Linéaires continus à Paramètres Variant dans le temps*. PhD thesis, Université Tunis Carthage, 2006.
- [78] C. Courties. *Sur la commande robuste et LPV de systèmes à paramètres lentement variables*. PhD thesis, INSA Toulouse, 1999.
- [79] A. El Hadri. *Modélisation de Véhicules, observation d'état et estimation des forces pneumatiques : Application au contrôle longitudinal*. PhD thesis, Université Versailles Saint Quentin en Yvelines, 2001.
- [80] R. Felix and D. Xanthoulis. Analyse de sensibilité du modèle mathématique "erosion productivity impact calculator" (epic) par l'approche one-factor-at-a-time (oat). *Biotechnologie, agronomie, société et environnement*, 9(3) :179–190, 2005.

-
- [81] D. Lhomme-Desages. *Commande d'un robot mobile rapide à roues non directionnelles sur sol naturel*. PhD thesis, Université Paris 6, 2008.
- [82] R.A. Ramirez Mendoza. *Sur la Modélisation et la Commande Des Véhicules Automobiles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1997.
- [83] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, and D. Gatelli. *Global Sensitivity Analysis. The primer*. 2007.
- [84] D. Sammier. *Sur la modélisation et la commande de suspension de véhicules automobiles*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2007.